Passos para resolver uma equação de recorrência:

$T(n) = 1*T(n-1) + 1$ para $n>0$; $T(0) = 0$

1º) $T(n) = 1*T(n-1) + 1$ => copie a fórmula original

2º) descubra o passo: $T(n)$ está escrito em função de $T(n-1)$ => a cada passo o parâmetro é subtraído em 1

3º) isole as equações para "os próximos passos": $T(n-1)$, $T(n-2)$, etc. Isto é, na equação original substitua todo n por n-1 (próximo passo), por n-2 (passo seguinte) e assim por diante:

$T(\mathbf{n-1}) = 1*T(\mathbf{n-1}-1) + 1 = 1*T(n-2) + 1$

$T(\mathbf{n-2}) = 1*T(\mathbf{n-2}-1) + 1 = 1*T(n-3) + 1$

$T(\mathbf{n-3}) = 1*T(\mathbf{n-3}-1) + 1 = 1*T(n-4) + 1$

4º) Substitua os valores isolados na fórmula original: substitua T(n-1) pelo valor que você isolou acima e em seguida faça o mesmo para T(n-2):

T(n) = 1***T(n-1)** + 1 (fórmula original) **1º**

agora iremos substituir o valor de T(n-1)

T(n) = 1*(**1*T(n-2) + 1**) + 1

T(n) = 1***T(n-2)** + 2 **2º**

agora iremos substituir o valor de T(n-2)

T(n) = 1*(**1*T(n-3) + 1)** + 2

T(n) = 1***T(n-3)** + 3 **3º**

agora iremos substituir o valor de T(n-3)

T(n) = 1***(1*T(n-4) + 1)** + 3

T(n) = 1*T(n-4) + 4 **4º**

5º) Identifique a fórmula do iésimo passo a partir dos passos anteriores:

1º $T(n) = 1*T(n-1) + 1$

2º $T(n) = 1*T(n-2) + 2$

3º $T(n) = 1*T(n-3) + 3$

4º $T(n) = 1*T(n-4) + 4$

iº $\mathbf{T(n) = 1*T(n-i) + i}$

6º) Descubra o valor de i (de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base:

$T(n-i) <=> T(0)$ (igualamos o valor dos parâmetros)

$n-i = 0$

$n = i$

$\mathbf{i = n}$

7º) Substitua o valor de i na fórmula do iésimo caso:

$T(n) = 1*T(n-\mathbf{i}) + \mathbf{i}$ com $i = n$

$T(n) = 1*T(n-\mathbf{n}) + \mathbf{n}$

$T(n) = 1*T(0) + n$ e pelo caso base sabemos que $T(0) = 0$

$T(n) = 1*0 + n$

$T(n) = n$

8º) Identifique a complexidade dessa fórmula (se necessário/solicitado demonstre isso):
$T(n) \in \theta(n)$

9º) Provando por indução que a equação foi corretamente encontrada:

Passo base: para $n=0$ o resultado esperado é 0 (caso base)

Com $T(n) = n$ e $n=0$ temos: $T(0) = 0$ **correto**

Passo indutivo: por hipótese de indução assumimos que a fórmula estará correta para $n-1$, isto é, $T(n-1) = n-1$.

Então, temos que verificar se $T(n) = n$,

sabendo-se que $T(n) = T(n-1) + 1$ (equação original)

e partindo da H.I. que $T(n-1) = n-1$

$T(n) = 1*T(n-1) + 1$

$T(n) = 1*(n-1) + 1$

$T(n) = n-1+ 1$

$T(n) = n$ => provamos o passo indutivo

Assim, demonstramos que $T(n) = 1*T(n-1) + 1 = n$ para $n\geq 0$

Segundo exemplo

$T(n) = 2*T(n/2) + 2$ para $n>1$; $T(1) = 1$

1º) $T(n) = 2*T(n/2) + 2$ => copie a fórmula original

2º) descubra o passo: $T(n)$ está escrito em função de $T(n/2)$ => a cada passo o parâmetro é dividido por 2

3º) isole as equações para "os próximos passos": $T(n/2)$, $T(n/4)$, $T(n/4)$, etc:

$T(\mathbf{n/2}) = 2*(T((\mathbf{n/2})/2)) + 2 = 2*(T(n/2^2)) + 2$
$T(\mathbf{n/4}) = 2*(T((\mathbf{n/4})/2)) + 2 = 2*(T(n/2^3)) + 2$
$T(\mathbf{n/8}) = 2*(T((\mathbf{n/8})/2)) + 2 = 2*(T(n/2^4)) + 2$

4º) Substitua os valores isolados na fórmula original: substitua T(n/2) pelo valor que você isolou acima e em seguida faça o mesmo para T(n/4) e assim por diante:

$T(n) = 2*\mathbf{T(n/2)} + 2$ (fórmula original) **1º**

agora iremos substituir o valor isolado de T(n/2)

$T(n) = 2*(\mathbf{2*(T(n/2^2))+2}) + 2$

$T(n) = 2^2*\mathbf{T(n/2^2)} + 6$ **2º**

agora iremos substituir o valor isolado de T(n/4)

$T(n) = 2^2*(\mathbf{2*(T(n/8)+2}) + 6$

$T(n) = 2^3*\mathbf{T(n/2^3)} + 2^4 - 2$ **3º**

agora iremos substituir o valor isolado de T(n/8)

$T(n) = 2^3*\mathbf{(2*(T(n/2^4)) + 2)} + 2^4 - 2 = 2^4*T(n/2^4) + 2^5 - 2$ **4º**

5º) Identifique a fórmula do iésimo passo:

1º $T(n) = 2^1 * T(n/2) + 2$

2º $T(n) = 2^2 * T(n/2^2) + 2^3 - 2$

3º $T(n) = 2^3 * T(n/2^3) + 2^4 - 2$

4º $T(n) = 2^4 * T(n/2^4) + 2^5 - 2$

iº $\mathbf{T(n) = 2^i * T(n/2^i) + 2^{i+1} - 2}$

6º) Descubra o valor de i (de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base:

$$T(n/2^i) \Leftrightarrow T(1)$$

$$n/2^i = 1$$

$$n = 2^i$$

$$\mathbf{i = \log(n)}$$

7º) Substitua o valor de i na fórmula do iésimo caso:
$T(n) = 2^{i}*T(n/2^{i}) + 2^{i+1} – 2$ com $i = \log(n)$

$T(n) = 2^{\mathbf{log(n)}}*T(n/2^{\mathbf{log(n)}}) + 2^{\mathbf{log(n)}+1} -2$
$T(n) = n*T(n/n) + 2*n – 2$
$T(n) = n*T(1) + 2*n – 2$
$T(n) = n + 2*n – 2$
$T(n) = 3*n - 2$

8º) Identifique a complexidade dessa fórmula (se necessário/solicitado demonstre isso):

$T(n) \in \theta(n)$

9º) Provando por indução que a equação foi corretamente encontrada:

Passo base: para n=1 o resultado esperado é 1

$T(n) = 3*n – 2 = 3*1 – 2 = 1$ correto

Passo indutivo: por hipótese de indução assumimos que a fórmula estará correta para n/2, isto é, $T(n/2) = 3*n/2 – 2$.

Então, temos que verificar se $T(n) = 3*n – 2$,

sabendo-se que $T(n) = 2*T(n/2) + 2$

e partindo da H.I. que $T(n/2) = 3*n/2 – 2$

$T(n) = 2*T(n/2) + 2$

$T(n) = 2*(3*n/2 – 2) + 2$

$T(n) = 2*3*n/2 – 2*2 + 2$

$T(n) = 3*n – 4 + 2$

$T(n) = 3*n - 2$ => provamos o passo indutivo

Assim, demonstramos que $T(n) = 2*T(n/2) + 2 = 3*n + 2$ para $n≥1$

Terceiro exemplo – Torre de Hanoi:

$T(n) = 2*T(n-1) + 1$; $T(1) = 1$

1º) $T(n) = 2*T(n-1) + 1$ => copie a fórmula original

2º) descubra o passo: $T(n)$ está escrito em função de $T(n-1)$ => a cada passo o parâmetro é decrementado em 1

3º) isole as equações para “os próximos passos”: $T(n-1)$, $T(n-2)$ etc:

$T(\mathbf{n-1}) = 2*T(\mathbf{n-2}) + 1$

$T(\mathbf{n-2}) = 2*T(\mathbf{n-3}) + 1$

$T(\mathbf{n-3}) = 2*T(\mathbf{n-4}) + 1$

4º) Substitua os valores isolados na fórmula original: substitua T(n-1) pelo valor que você isolou e em seguida faça o mesmo para T(n-2):

$T(n) = 2*\mathbf{T(n-1)} + 1$ (fórmula original) **1º**

agora iremos substituir o valor de T(n-1)

$T(n) = 2*(\mathbf{2*T(n-2) + 1}) + 1$

$T(n) = 2^2*\mathbf{T(n-2)} + 2 + 1$ **2º**

agora iremos substituir o valor de T(n-2)

$T(n) = 2^2*(\mathbf{2*T(n-3) + 1}) + 2 + 1$

$T(n) = 2^3*T(n-3) + 2^2 + 2 + 1 = 2^3*\mathbf{T(n-3)} + 2^3 – 1$ **3º**

agora iremos substituir o valor de T(n-3)

$T(n) = 2^3*(\mathbf{2*T(n-4) + 1}) + 2^3 – 1 = 2^4*T(n-4) + 2^4 - 1$ **4º**

5º) Identifique a fórmula do iésimo passo:

1º $T(n) = 2 * T(n-1) + 1$

2º $T(n) = 2^2 * T(n-2) + 2^2 - 1$

3º $T(n) = 2^3 * T(n-3) + 2^3 - 1$

4º $T(n) = 2^4 * T(n-4) + 2^4 - 1$

iº $\mathbf{T(n) = 2^i * T(n - i) + 2^i - 1}$

6º) Descubra o valor de i (de forma a igualar o parâmetro de T(x) ao parâmetro (valor de n) no caso base):

$$T(n-i) \Leftrightarrow T(1)$$
$$n-i = 1$$
$$n = 1+i$$
$$i = n-1$$

7º) Substitua o valor de i na fórmula do iésimo caso:

$T(n) = 2^{i}*T(n -i) + 2^{i} – 1$ (com i = n-1)

$T(n) = 2^{\mathbf{n-1}}*T(n-(\mathbf{n-1})) + 2^{\mathbf{n-1}} - 1$

$T(n) = 2^{\mathbf{n-1}}*T(1) + 2^{\mathbf{n-1}} - 1$

$T(n) = 2^{n-1}*1 + 2^{n-1} - 1$

$T(n) = 2*2^{n-1} – 1 = 2^{n} – 1$

8º) Identifique a complexidade dessa fórmula (se necessário/solicitado demonstre isso):

$T(n) \in \theta(2^{n})$

9º) Provando por indução que a equação foi corretamente encontrada:

Passo base: para n=1 o resultado esperado é 1

$T(n) = 2^n - 1 = 2 - 1 = 1$ correto

Passo indutivo: por hipótese de indução assumimos que a fórmula estará correta para n-1, isto é, $T(n-1) = 2^{n-1} - 1$.

Então, temos que verificar se $T(n) = 2^n - 1$,

sabendo-se que $T(n) = 2*T(n-1) + 1$

e partindo da H.I. que $T(n-1) = 2^{n-1} - 1$

$T(n) = 2*T(n-1) + 1$

$T(n) = 2*(2^{n-1} - 1) + 1$

$T(n) = 2^n - 2 + 1$

$T(n) = 2^n - 1$ => provamos o passo indutivo

Assim, demonstramos que $T(n) = 2*T(n-1) + 1 = 2^n - 1$ para $n \geq 1$