Aula 06 – Recursão

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023

Indução e Algoritmos

- Vimos que podemos provar que um determinado problema, definido no conjunto dos números inteiros positivos, possui solução.

Indução e Algoritmos

- Vimos que podemos provar que um determinado problema, definido no conjunto dos números inteiros positivos, possui solução.

O que é mesmo um algoritmo?

Indução e Algoritmos

- Vimos que podemos provar que um determinado problema, definido no conjunto dos números inteiros positivos, possui solução.

O que é mesmo um algoritmo?

Uma sequência de passos a serem efetuados para que se obtenha uma solução para um determinado problema

Indução e Algoritmos

- Vimos que podemos provar que um determinado problema, definido no conjunto dos números inteiros positivos, possui solução.

O que é mesmo um algoritmo?

Uma sequência de passos a serem efetuados para que se obtenha uma solução para um determinado problema

- Então, por extensão, podemos provar que um determinado algoritmo, cuja entrada sejam números inteiros positivos, estará correto para todo inteiro positivo

Indução e Algoritmos

- De fato, podemos usar a prova por indução em qualquer afirmação que contenha uma variável que possa assumir valores inteiros arbitrários e não-negativos

Indução e Algoritmos

- De fato, podemos usar a prova por indução em qualquer afirmação que contenha uma variável que possa assumir valores inteiros arbitrários e não-negativos

E o que fazemos com isso???

Indução e Algoritmos

- De fato, podemos usar a prova por indução em qualquer afirmação que contenha uma variável que possa assumir valores inteiros arbitrários e não-negativos

E o que fazemos com isso???

- Precisamos já ter o algoritmo para provar sua corretude

Indução e Algoritmos

- De fato, podemos usar a prova por indução em qualquer afirmação que contenha uma variável que possa assumir valores inteiros arbitrários e não-negativos

E o que fazemos com isso???

- Precisamos já ter o algoritmo para provar sua corretude
- Então como isso me ajuda a criar o algoritmo?

Indução e Algoritmos

- Ocorre que a prova matemática via indução finita é, ela própria, um algoritmo recursivo

Indução e Algoritmos

- Ocorre que a prova matemática via indução finita é, ela própria, um algoritmo recursivo
- Algoritmo recursivo?

Indução e Algoritmos

- Ocorre que a prova matemática via indução finita é, ela própria, um algoritmo recursivo
- Algoritmo recursivo?
- Vejamos o que diz o dicionário Fakess para a língua portuguesa:

Indução e Algoritmos

- Ocorre que a prova matemática via indução finita é, ela própria, um algoritmo recursivo
- Algoritmo recursivo?
- Vejamos o que diz o dicionário Fakess para a língua portuguesa:

Definição

Recursão: Se não entendeu, vide Recursão.

Recursão

Definição

Um método é chamado de recursivo quando chama a si mesmo, direta ou indiretamente.

Recursão

Definição

Um método é chamado de recursivo quando chama a si mesmo, direta ou indiretamente.

E qual a vantagem disso?

Recursão

Definição

Um método é chamado de recursivo quando chama a si mesmo, direta ou indiretamente.

E qual a vantagem disso?

- Em geral, a recursividade permite uma descrição mais clara e concisa do algoritmo

Recursão

Definição

Um método é chamado de recursivo quando chama a si mesmo, direta ou indiretamente.

E qual a vantagem disso?

- Em geral, a recursividade permite uma descrição mais clara e concisa do algoritmo
- Métodos recursivos baseiam-se no princípio da Indução Finita
  - São escolhas naturais para algoritmos definidos assim

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`
  - Conseguimos então calcular o fatorial de n, a partir de `fatorial(n-1)`?

Indução e Recursão

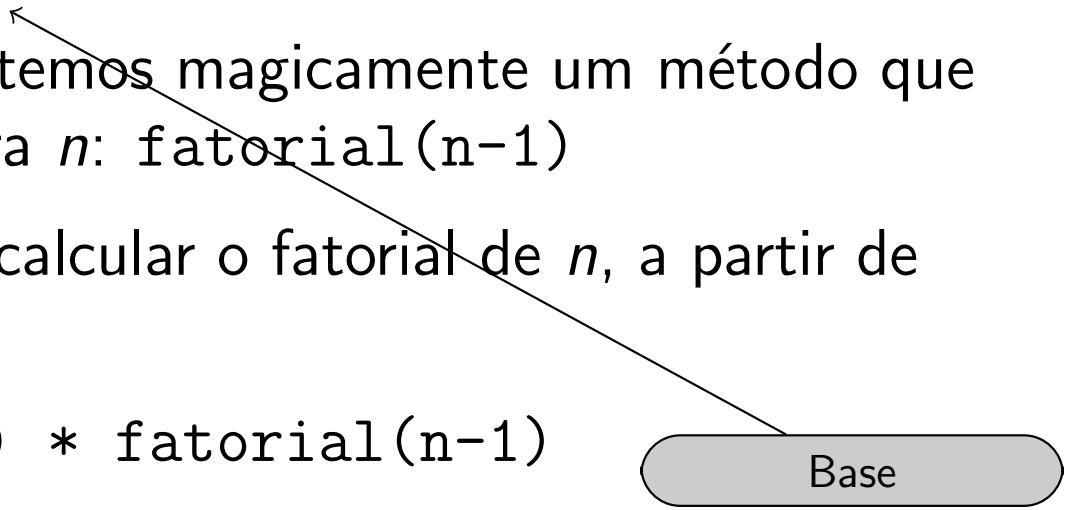
- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`
  - Conseguimos então calcular o fatorial de n, a partir de `fatorial(n-1)`?

    Sim, basta fazer `(n) * fatorial(n-1)`

Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`
  - Conseguimos então calcular o fatorial de n, a partir de `fatorial(n-1)`?

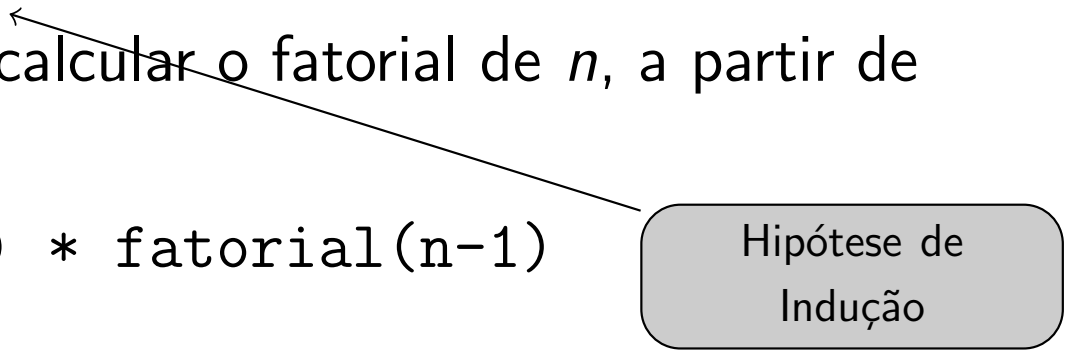
    Sim, basta fazer `(n) * fatorial(n-1)`



Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`
  - Conseguimos então calcular o fatorial de n, a partir de `fatorial(n-1)`?

    Sim, basta fazer `(n) * fatorial(n-1)`



Indução e Recursão

- E como isso nos ajuda a construir um algoritmo com indução finita?
- Tomemos um exemplo: o cálculo de um fatorial
  - Sabemos que $fatorial(0) = 1$
  - Vamos assumir que temos magicamente um método que calcule o fatorial para n: `fatorial(n-1)`
  - Conseguimos então calcular o fatorial de n, a partir de `fatorial(n-1)`?

    Sim, basta fazer `(n) * fatorial(n-1)` ← Passo

Indução e Recursão

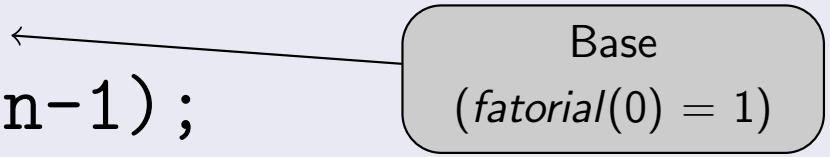
Então...

```
long fatorial(long n) {
    if (n==0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```

Indução e Recursão

Então...

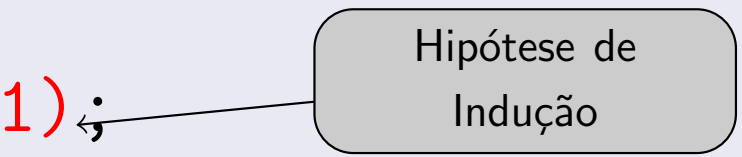
```
long fatorial(long n) {
    if (n==0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```



Indução e Recursão

Então...

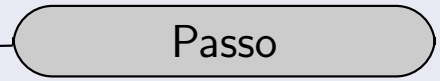
```
long fatorial(long n) {
    if (n==0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```



Indução e Recursão

Então...

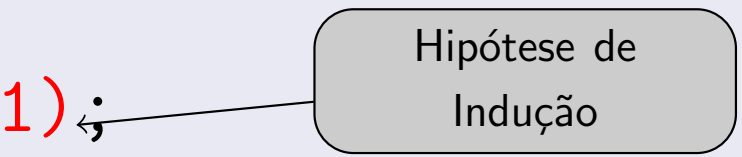
```
long fatorial(long n) {
    if (n==0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```



Indução e Recursão

Então...

```
long fatorial(long n) {
    if (n==0) return 1;
    return n * fatorial(n-1);
}
```



Implementação de Recursão

E como o compilador implementa a recursão?

Implementação de Recursão

E como o compilador implementa a recursão?

- Por meio da pilha de execução

Implementação de Recursão

E como o compilador implementa a recursão?

- Por meio da pilha de execução
- A cada chamada de método, são empilhados
  - Seus atributos
  - Suas variáveis locais
  - Seu endereço de retorno (a quem chamou o método)

Implementação de Recursão

E como o compilador implementa a recursão?

- Por meio da pilha de execução
- A cada chamada de método, são empilhados
  - Seus atributos
  - Suas variáveis locais
  - Seu endereço de retorno (a quem chamou o método)
- Quando o método termina, esses dados são desempilhados

Implementação de Recursão

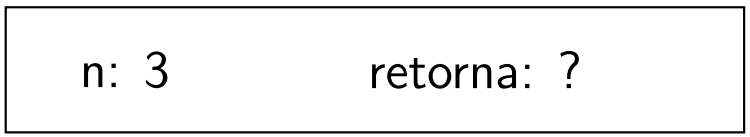
O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```



Ao chamarmos `fatorial(3)`, o método é empilhado

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 3	retorna: ?

Não é o caso base

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Então nova chamada é feita e empilhada

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Não é o caso base

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Então nova chamada é feita e empilhada

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Não é o caso base

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 0	retorna: ?
n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Então nova chamada é feita e empilhada

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 0	retorna: 1
n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

É o caso base!

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Desempilha, retornando 1

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 1	retorna: 1
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Faz 1 * 1

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Desempilha, retornando 1

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

n: 2	retorna: 2
n: 3	retorna: ?

Faz 2 * 1

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

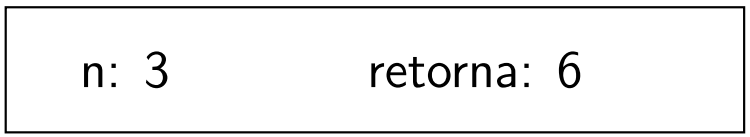
n: 3	retorna: ?

Desempilha, retornando 2

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```



Faz 3 * 2

Implementação de Recursão

O que acontece ao fazermos `fatorial(3)`?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Desempilha, retornando 6

Implementação de Recursão

Note que, a cada chamada recursiva, criamos cópias distintas do método na pilha

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1)
}
```

n: 0	retorna: ?
n: 1	retorna: ?
n: 2	retorna: ?
n: 3	retorna: ?

Recursão pode ser bastante custosa!

Implementação de Recursão

- E se esquecermos do caso base?

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Implementação de Recursão

- E se esquecermos do caso base?

```
long fatorial(long n) {

  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Implementação de Recursão

- E se esquecermos do caso base?
- Serão feitas chamadas recursivas, até o limite do segmento de memória alocado à pilha

```
long fatorial(long n) {

  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Implementação de Recursão

- E se esquecermos do caso base?
- Serão feitas chamadas recursivas, até o limite do segmento de memória alocado à pilha
- E teremos então um estouro de pilha
  - Stack overflow 

```
long fatorial(long n) {

  return n *
       fatorial(n-1);
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum?

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado

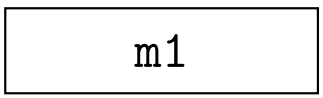
```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - Ao chamarmos `m1()`, este é empilhado



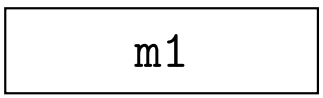

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - Ao chamarmos `m1()`, este é empilhado



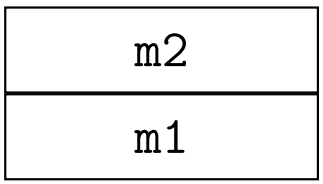

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - O mesmo ocorre com `m2()`



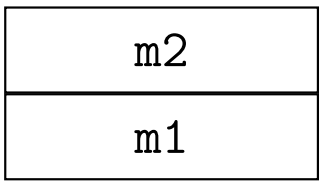

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - O mesmo ocorre com `m2()`



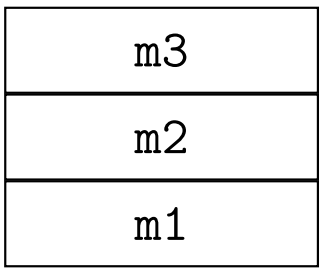

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - E `m3()`



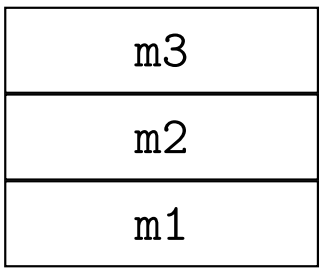

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - E `m3()`



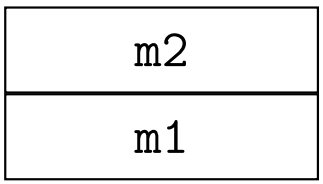

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - Ao terminar, `m3()` é desempilhado



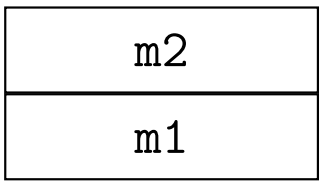

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - Ao terminar, `m3()` é desempilhado



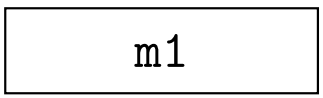

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - E `m2()`



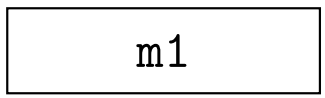

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - E `m2()`




```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E qual a diferença entre uma chamada recursiva e uma comum? Nenhuma!
- Considere o código ao lado
  - E finalmente `m1()`

```
void m1() {
  c1;
  m2();
  c2;
}

void m2() {
  c3;
  m3();
  c4;
}

void m3() {
  c5;
}
```

Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

Implementação de Recursão

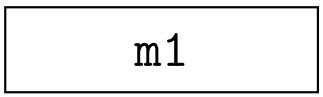
- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Ao chamarmos `m1()`, este é empilhado

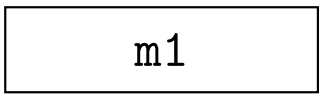
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Ao chamarmos `m1()`, este é empilhado

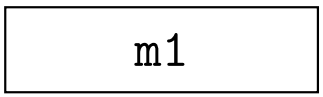
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Ao chamarmos `m1()`, este é empilhado

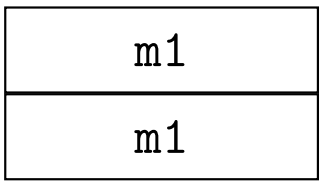
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Mais uma vez...

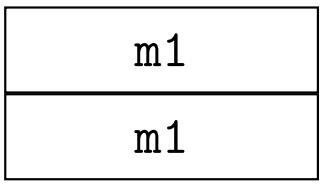
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Mais uma vez...

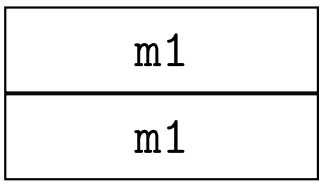
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Mais uma vez...

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - E mais uma...

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

Implementação de Recursão

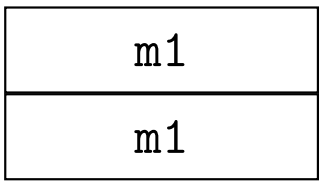
- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Até que a condição ser falsa

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - E um retorne, sendo desempilhado

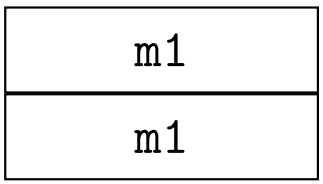
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - E um retorne, sendo desempilhado

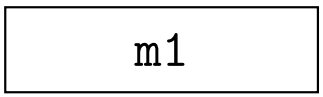
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - E outro

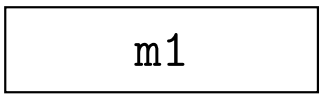
```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - E outro

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```



Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Até a chamada original

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

Implementação de Recursão

- E se o método for recursivo?
- Ocorre a mesma coisa...
  - Até a chamada original

```
void m1() {
  if (condição) {
    c1;
    m1();
    c2;
  }
}
```

- São todas chamadas distintas. A única diferença é que na recursão, elas possuem o mesmo nome

Recursão e Sequências

Sequências

- Uma sequência S é uma lista de objetos que são enumerados segundo alguma ordem
  - Existe um primeiro objeto, um segundo etc

Recursão e Sequências

Sequências

- Uma sequência S é uma lista de objetos que são enumerados segundo alguma ordem
  - Existe um primeiro objeto, um segundo etc
- Uma sequência é definida recursivamente explicitando-se seu primeiro valor (ou primeiros valores) e, a partir daí, definindo-se outros valores em termos desses iniciais.

Recursão e Sequências

Sequências

- Uma sequência S é uma lista de objetos que são enumerados segundo alguma ordem
  - Existe um primeiro objeto, um segundo etc
- Uma sequência é definida recursivamente explicitando-se seu primeiro valor (ou primeiros valores) e, a partir daí, definindo-se outros valores em termos desses iniciais.
- Conjuntos, por outro lado, são coleções nas quais nenhuma regra de ordenação é imposta

Recursão e Sequências

Sequências

- Uma sequência S é uma lista de objetos que são enumerados segundo alguma ordem
  - Existe um primeiro objeto, um segundo etc
- Uma sequência é definida recursivamente explicitando-se seu primeiro valor (ou primeiros valores) e, a partir daí, definindo-se outros valores em termos desses iniciais.
- Conjuntos, por outro lado, são coleções nas quais nenhuma regra de ordenação é imposta
  - Alguns conjuntos podem ser definidos recursivamente

Recursão × Iteração

- Sequências têm tanto algoritmos iterativos quanto recursivos
  - Então algoritmos recursivos, **que tratam de sequências**, têm sua versão iterativa

- Ex:

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n*fatorial(n-1);
}
```

```
long fatorial(long n) {
  long res = 1;
  int i;
  for (i=2; i<=n; i++)
    res *= i;
  return res;
}
```

Recursão × Iteração

- Sequências têm tanto algoritmos iterativos quanto recursivos
  - Então algoritmos recursivos, **que tratam de sequências**, têm sua versão iterativa

- Ex:

```
long fatorial(long n) {
  if (n==0) return 1;
  return n*fatorial(n-1);
}
```

Recursivo

```
long fatorial(long n) {
  long res = 1;
  int i;
  for (i=2; i<=n; i++)
    res *= i;
  return res;
}
```

Iterativo

Recursão × Iteração

- Programas recursivos que possuem chamadas no final do código são facilmente transformáveis em uma versão não recursiva
  - Ditos terem recursividade de cauda

Recursão × Iteração

Iterativo

```
int buscaBin(int arr[], int el,
                        int n) {
  int fim = n-1;
  int ini = 0;
  int meio;
  while (ini <= fim) {
    meio = (fim + ini)/2;
    if (arr[meio] < el)
      ini = meio + 1;
    else
      if (arr[meio] > el)
        fim = meio - 1;
      else return meio;
  }
  return -1;
}
```

Recursão × Iteração

Iterativo

```
int buscaBin(int arr[], int el,
                        int n) {
  int fim = n-1;
  int ini = 0;
  int meio;
  while (ini <= fim) {
    meio = (fim + ini)/2;
    if (arr[meio] < el)
      ini = meio + 1;
    else
      if (arr[meio] > el)
        fim = meio - 1;
      else return meio;
  }
  return -1;
}
```

Recursivo

```
int buscaBin(int arr[], int el,
             int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return
    buscaBin(arr,el,meio+1,fim);
  if (arr[meio] > el) return
    buscaBin(arr,el,ini,meio-1);
  return meio;
}
```

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas, gerando programas mais simples.

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas, gerando programas mais simples.
- Soluções recursivas advém diretamente da prova por indução

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas, gerando programas mais simples.
- Soluções recursivas advém diretamente da prova por indução
- Soluções iterativas em geral usam uma quantia de memória limitada, enquanto as recursivas não

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas, gerando programas mais simples.
- Soluções recursivas advém diretamente da prova por indução
- Soluções iterativas em geral usam uma quantia de memória limitada, enquanto as recursivas não
- A cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas

Recursão - algumas considerações

```
int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return(buscaBin(arr,el,meio+1, fim));
  if (arr[meio] > el) return(buscaBin(arr,el,ini, meio-1));
  return(meio);
}
```

Recursão - algumas considerações

Tipicamente, o "usuário" poderá não entender os parâmetros 'extras' da nossa função recursiva.

```
int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return(buscaBin(arr,el,meio+1, fim));
  if (arr[meio] > el) return(buscaBin(arr,el,ini, meio-1));
  return(meio);
}
```

Recursão - algumas considerações

Tipicamente, o "usuário" poderá não entender os parâmetros 'extras' da nossa função recursiva. Por isso é comum termos uma função principal/inicial que chama a função recursiva.

```
int buscaBinaria(int arr[], int el, int n) {
  return buscaBin(arr, el, 0, n-1);
}
```

```
int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return(buscaBin(arr,el,meio+1, fim));
  if (arr[meio] > el) return(buscaBin(arr,el,ini, meio-1));
  return(meio);
}
```

Recursão - algumas considerações

Tipicamente, o "usuário" poderá não entender os parâmetros 'extras' da nossa função recursiva. Por isso é comum termos uma função principal/inicial que chama a função recursiva.
Dependendo do compilador C usado, ele pode reclamar por não "conhecer" a função que está sendo chamada na recursão.

```
int buscaBinaria(int arr[], int el, int n) {
  return buscaBin(arr, el, 0, n-1);
}
```

```
int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return(buscaBin(arr,el,meio+1, fim));
  if (arr[meio] > el) return(buscaBin(arr,el,ini, meio-1));
  return(meio);
}
```

Recursão - algumas considerações

Tipicamente, o "usuário" poderá não entender os parâmetros 'extras' da nossa função recursiva. Por isso é comum termos uma função principal/inicial que chama a função recursiva.
Dependendo do compilador C usado, ele pode reclamar por não "conhecer" a função que está sendo chamada na recursão. Nestes casos é comum realizarmos uma declaração prévia da função (apenas de sua assinatura).

```
int buscaBinaria(int arr[], int el, int n) {
  return buscaBin(arr, el, 0, n-1);
}

int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim);
int buscaBin(int arr[], int el, int ini, int fim) {
  int meio = (fim + ini)/2;
  if (ini > fim) return -1;
  if (arr[meio] < el) return(buscaBin(arr,el,meio+1, fim));
  if (arr[meio] > el) return(buscaBin(arr,el,ini, meio-1));
  return(meio);
}
```

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Dado um arranjo $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ de coeficientes, e um valor x, queremos calcular o polinômio
  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Dado um arranjo $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ de coeficientes, e um valor x, queremos calcular o polinômio
  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
- Vamos projetar um algoritmo para resolver esse problema a partir da demonstração indutiva da seguinte afirmação:

  Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, posso calcular $P_n(x)$

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$
  - **Passo**: É direto que $P_n(x) = a_n x^n + P_{n-1}(x)$

Exemplo: Cálculo de Polinômios

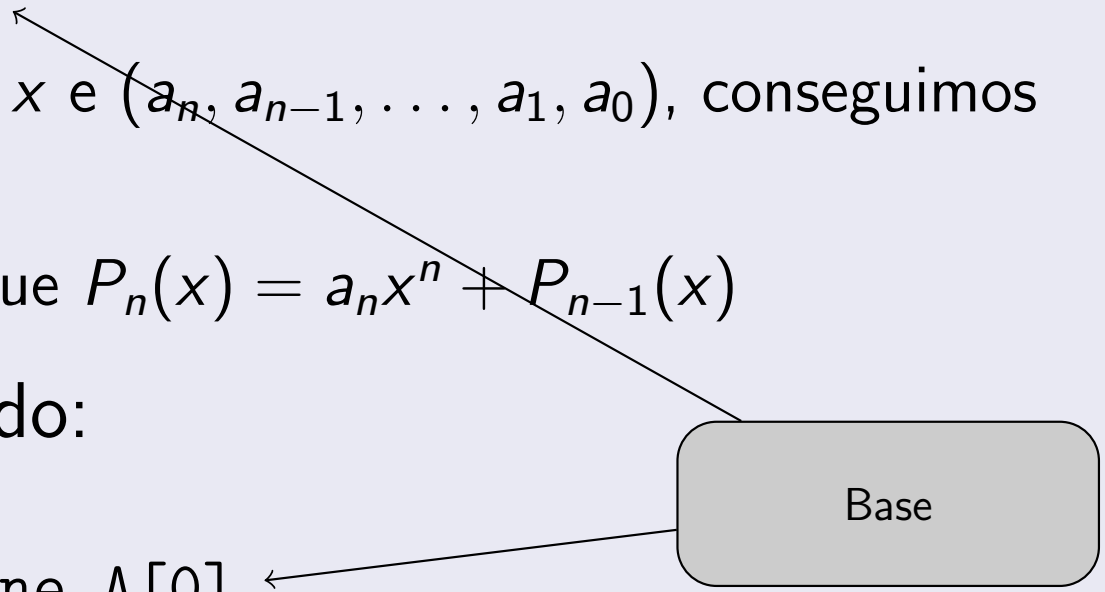
- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$
  - **Passo**: É direto que $P_n(x) = a_n x^n + P_{n-1}(x)$
- Algoritmo derivado:

```
P(A, x, n)
  se n = 0 retorne A[0]
  senão
    retorne A[n] * x^n + P(A, x, n-1)
```

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$
  - **Passo**: É direto que $P_n(x) = a_n x^n + P_{n-1}(x)$
- Algoritmo derivado:

```
P(A, x, n)
  se n = 0 retorne A[0]
  senão
    retorne A[n] * x^n + P(A, x, n-1)
```



Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$
  - **Passo**: É direto que $P_n(x) = a_n x^n + P_{n-1}(x)$
- Algoritmo derivado:

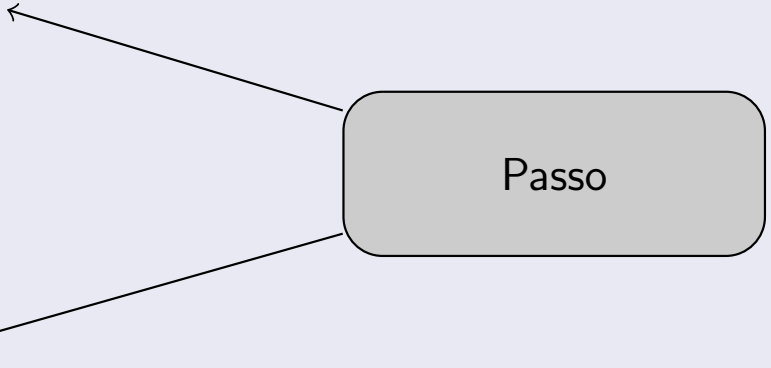
```
P(A, x, n)
  se n = 0 retorne A[0]
  senão
    retorne A[n] * x^n + P(A, x, n-1)
```

Hipótese de Indução

Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Demonstração:
  - **Base**: $P_0(x) = a_0$
  - **Hipótese**: Dados x e $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, conseguimos calcular $P_{n-1}(x)$
  - **Passo**: É direto que $P_n(x) = a_n x^n + P_{n-1}(x)$
- Algoritmo derivado:

```
P(A, x, n)
  se n = 0 retorne A[0]
  senão
    retorne A[n] * x^n + P(A, x, n-1)
```



Exemplo: Cálculo de Polinômios

- Algoritmo:

```
P(A, x, n)
  se n = 0 retorne A[0]
  senão
    retorne A[n] * x^n + P(A, x, n-1)
```

- E em C:

```
#include <math.h>
double pol(double A[], double x, int n) {
  if (n==0) return(A[0]);
  return A[n] * pow(x,n) + pol(A,x,n-1);
}
```

Indução e Algoritmos

Exemplo: Busca Binária

- Vimos o algoritmo "já pronto". Mas será que conseguimos implementá-lo a partir da prova?

Indução e Algoritmos

Exemplo: Busca Binária

- Vimos o algoritmo "já pronto". Mas será que conseguimos implementá-lo a partir da prova?
- Considere a afirmação:

  "Dado um arranjo r, ordenado de forma crescente, de tamanho $n \geq 1$, consigo dizer se um determinado valor x está ou não está no arranjo"

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$.

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$ (ind. forte)

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$ (ind. forte)
- **Passo**: Seja s um arranjo de $j + 1$ elementos.

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$ (ind. forte)
- **Passo**: Seja s um arranjo de $j + 1$ elementos.
  - Se o elemento do meio de s, s_m for x, então $x \in s$

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$ (ind. forte)
- **Passo**: Seja s um arranjo de $j + 1$ elementos.
  - Se o elemento do meio de s, s_m for x, então $x \in s$
  - Senão, se $s_m > x$, olho no sub-arranjo $s' = [s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}]$. Pela H.I., sei dizer se $x \in s'$, então sei dizer se $x \in s$

Exemplo: Busca Binária

- **Base**: $n = 1$. Se $r_1 = x$, então $x \in r$, senão $x \notin r$
- **Hipótese (H.I.)**:
  - Dado $j \geq 1$ e um arranjo r de j elementos, em ordem crescente, sei dizer se $x \in r$, $\forall i = |r|$, $1 \leq i \leq j$ (ind. forte)
- **Passo**: Seja s um arranjo de $j + 1$ elementos.
  - Se o elemento do meio de s, s_m for x, então $x \in s$
  - Senão, se $s_m > x$, olho no sub-arranjo $s' = [s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}]$. Pela H.I., sei dizer se $x \in s'$, então sei dizer se $x \in s$
  - Senão ($s_m < x$), olho no sub-arranjo $s' = [s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{j+1}]$. Pela H.I., sei dizer se $x \in s'$, então sei dizer se $x \in s$

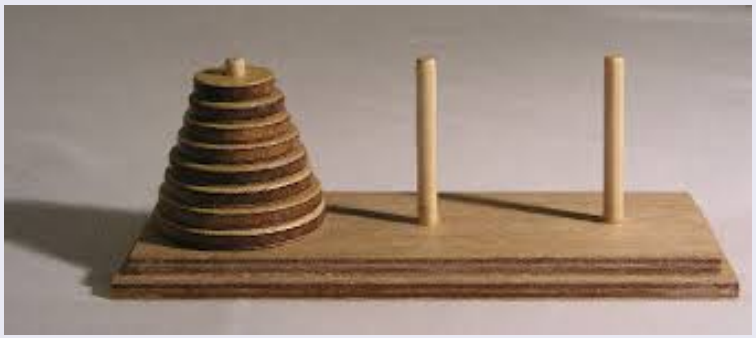
Exemplo: Busca Binária

- E disso temos o algoritmo:

```
busca(r, x)
  se |r| = 1
    se r_1=x retorna "está"
    senão retorna "não está"
  senão
    m <- índice do meio do arranjo
    se r_m = x, retorna "está"
    senão, se r_m > x
      retorna busca([r_1, r_2, ..., r_{m-1}], x)
      senão
        retorna busca([r_{m+1}, r_{m+2}, ..., r_{|r|}], x)
```

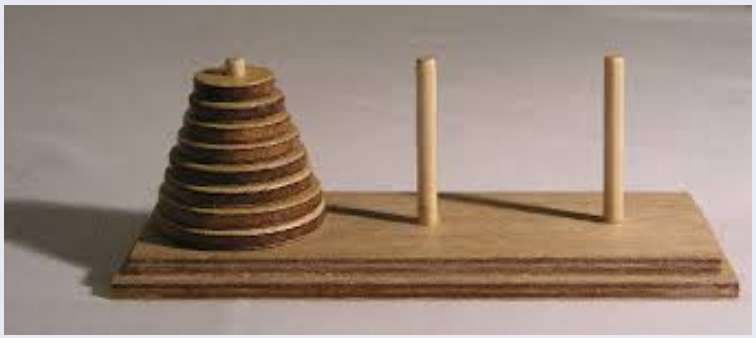
Exemplo: Torres de Hanói

- Considere a imagem



Exemplo: Torres de Hanói

- Considere a imagem



- O objetivo é mover os n discos do primeiro pino a um outro, de acordo com as seguintes regras:
  - Apenas um disco pode ser movido por vez
  - Um disco maior não pode ser colocado sobre um menor
  - Pode-se usar o terceiro pino como auxiliar

Exemplo: Torres de Hanói

- Como fazer?

Exemplo: Torres de Hanói

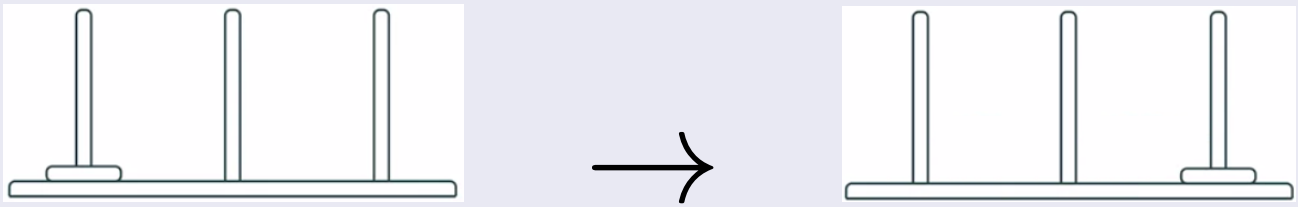
- Como fazer?
- Quero demonstrar que: Dados três pinos, e uma torre de n discos em um desses pinos, consigo mover essa torre para um segundo pino, sujeito às condições:
  - Apenas um disco pode ser movido por vez
  - Um disco maior não pode ser colocado sobre um menor
  - Pode-se usar o terceiro pino como auxiliar

Exemplo: Torres de Hanói

- **Base**: $n = 1$

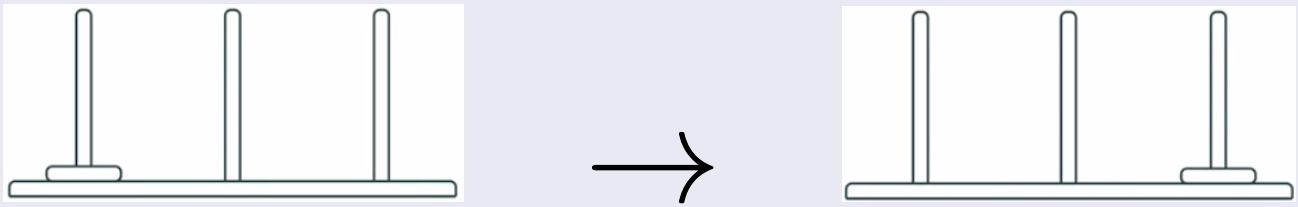
Exemplo: Torres de Hanói

- **Base**: $n = 1$
  - Mova o disco do pino de origem para o de destino



Exemplo: Torres de Hanói

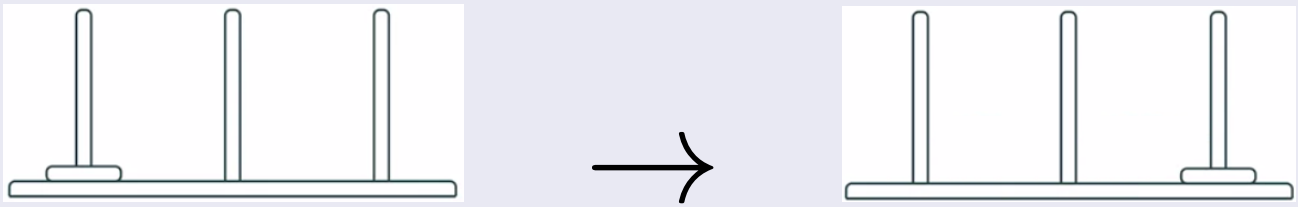
- **Base**: $n = 1$
  - Mova o disco do pino de origem para o de destino



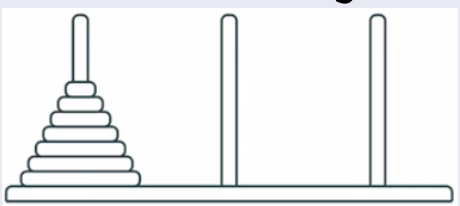
- **Hipótese**: Consigo mover uma torre de $j - 1$ discos, $(j - 1) \geq 1 \Rightarrow j > 1$

Exemplo: Torres de Hanói

- **Base**: $n = 1$
  - Mova o disco do pino de origem para o de destino



- **Hipótese**: Consigo mover uma torre de $j - 1$ discos, $(j - 1) \geq 1 \Rightarrow j > 1$
- **Passo**: Seja uma torre de Hanói com j discos:

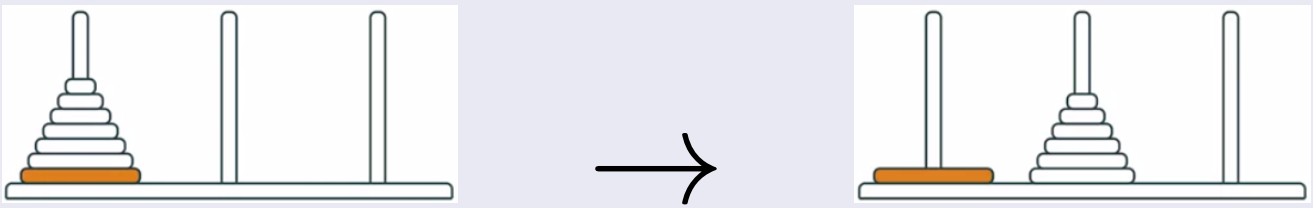


Exemplo: Torres de Hanói

- **Passo** (cont.): Pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do topo para um pino auxiliar

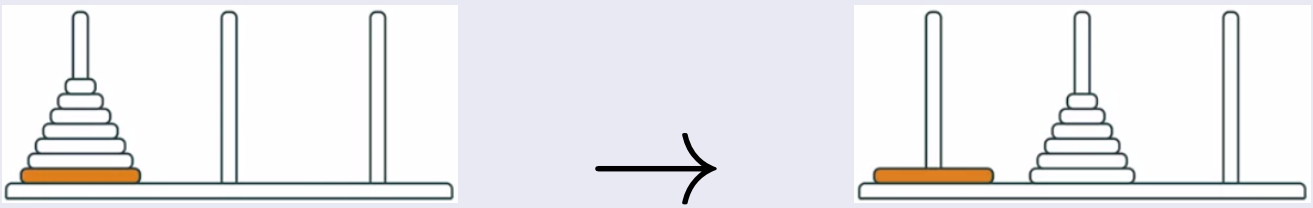
Exemplo: Torres de Hanói

- **Passo** (cont.): Pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do topo para um pino auxiliar



Exemplo: Torres de Hanói

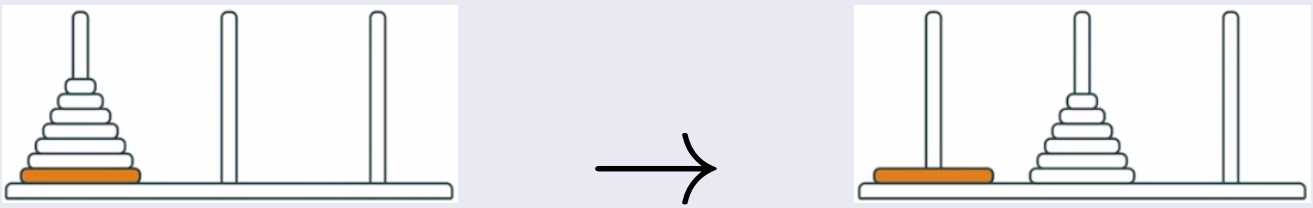
- **Passo** (cont.): Pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do topo para um pino auxiliar



Movo então o disco da base para o pino de destino

Exemplo: Torres de Hanói

- **Passo** (cont.): Pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do topo para um pino auxiliar



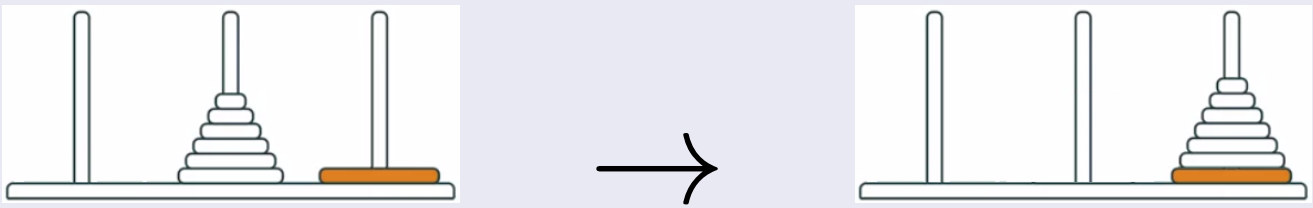
Movo então o disco da base para o pino de destino

Exemplo: Torres de Hanói

- **Passo** (cont.): E, novamente pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do pino auxiliar para o de destino

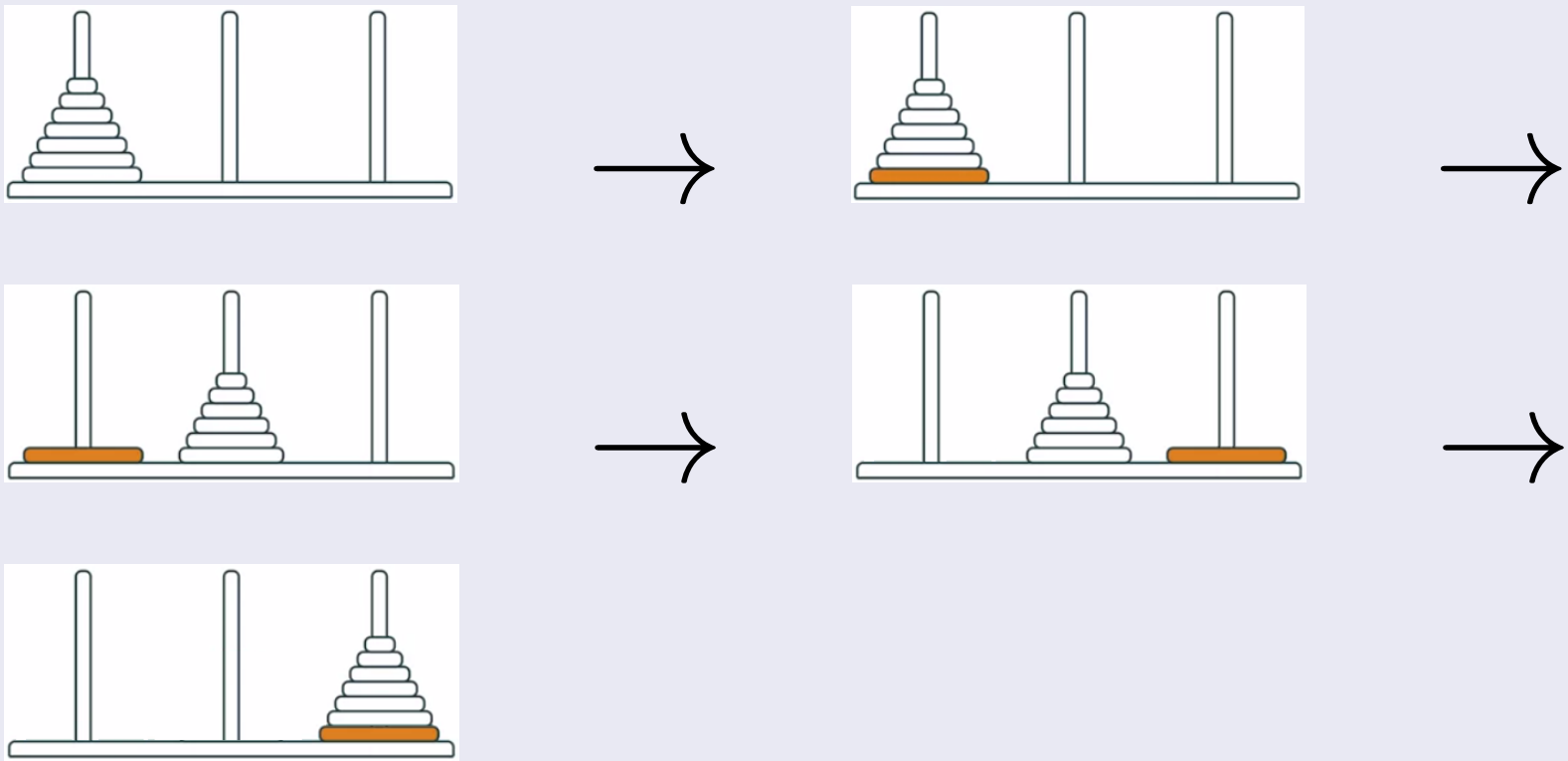
Exemplo: Torres de Hanói

- **Passo** (cont.): E, novamente pela H.I., consigo mover os $j-1$ discos do pino auxiliar para o de destino



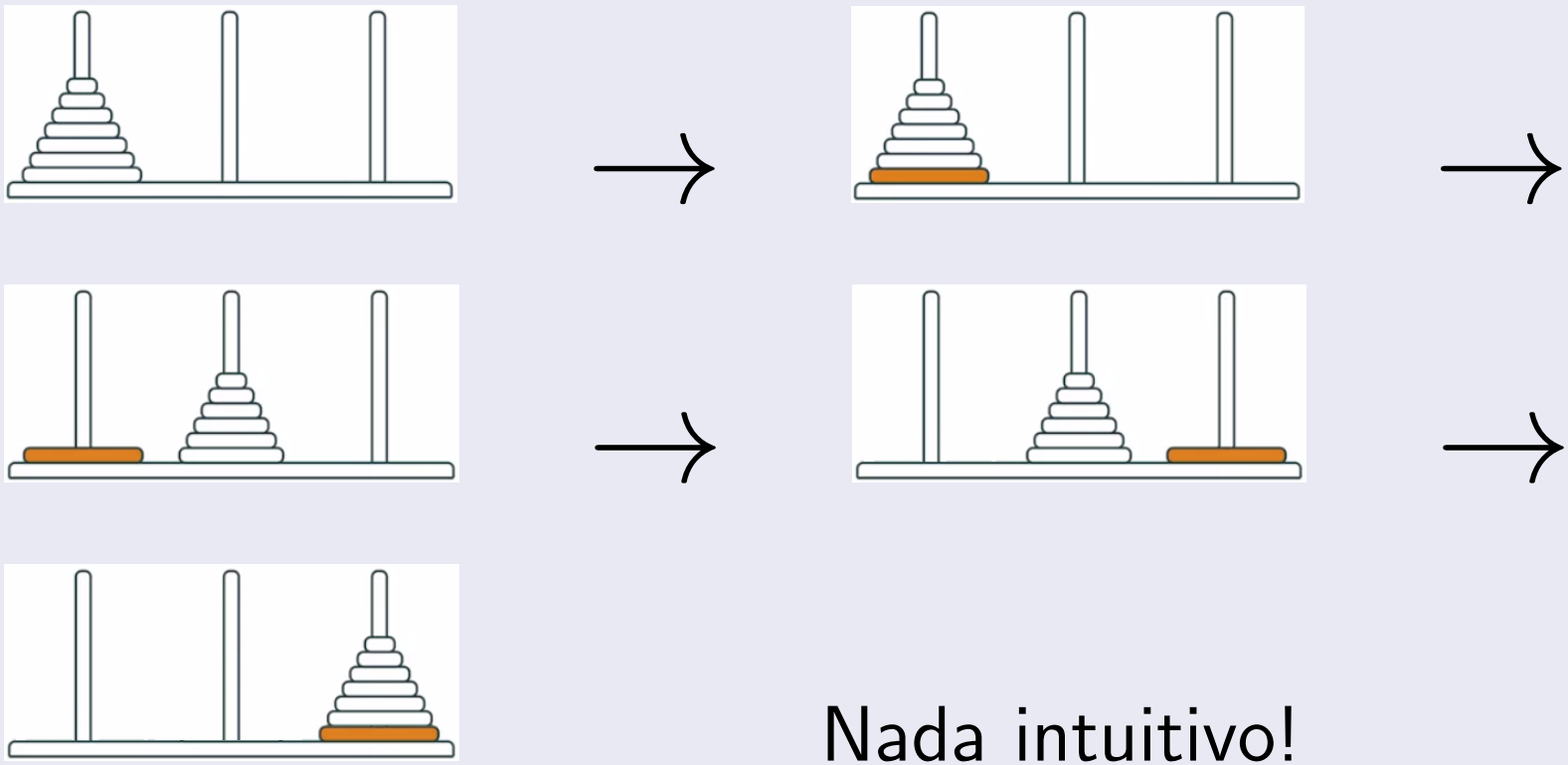
Exemplo: Torres de Hanói

- Ou seja...



Exemplo: Torres de Hanói

- Ou seja...



Nada intuitivo!

Exemplo: Torres de Hanói

- E...

```
void hanoi(char ori, char dst, char aux, int n) {
  if(n == 1) {
    printf("Mova de %c para %c.\n", ori, dst);
  } else {
    hanoi(ori, aux, dst, n-1);
    hanoi(ori, dst, aux, 1);
    hanoi(aux, dst, ori, n-1);
  }
}
```

Torres de Hanói: resultado

- `hanoi('O','D','A',3)`:

  Mova de O para D.

  Mova de O para A.

  Mova de D para A.

  Mova de O para D.

  Mova de A para O.

  Mova de A para D.

  Mova de O para D.

Em Suma

- Algoritmos tratam sempre de se demonstrar um teorema:

Em Suma

- Algoritmos tratam sempre de se demonstrar um teorema:
  - Meu algoritmo resolve um determinado problema

Em Suma

- Algoritmos tratam sempre de se demonstrar um teorema:
  - Meu algoritmo resolve um determinado problema
- A demonstração por indução é uma técnica bastante interessante, pois:

Em Suma

- Algoritmos tratam sempre de se demonstrar um teorema:
  - Meu algoritmo resolve um determinado problema
- A demonstração por indução é uma técnica bastante interessante, pois:
  - Possui a característica de ser construtiva, evidenciando os passos necessários para se obter o resultado do teorema

Em Suma

- Algoritmos tratam sempre de se demonstrar um teorema:
  - Meu algoritmo resolve um determinado problema
- A demonstração por indução é uma técnica bastante interessante, pois:
  - Possui a característica de ser construtiva, evidenciando os passos necessários para se obter o resultado do teorema
  - Útil para formular procedimentos recursivos e indutivos cujas provas de corretude são as provas por indução que lhes deram origem.

Referências

- Ziviani, Nivio. Projeto de Algoritmos: com implementações em Java e C++. Cengage. 2007.
- Manber, Udi. Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Addison-Wesley. 1989.
- Gersting, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 3a ed. LTC. 1993.
- Manber, Udi. Using Induction to Design Algorithms. Communications of the ACM, 31(11). 1988.

Referências

- https://www.coursera.org/lecture/what-is-a-proof/hanoi-towers-V5KXZ
- https://algorithms.tutorialhorizon.com/towers-of-hanoi/
- http://larc.unt.edu/ian/TowersOfHanoi/index64.html

Aula 06 – Recursão

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023