Aula 05 – Indução Fraca e Forte

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023

Indução

- Técnica importante para projeto de algoritmos
- Ferramenta útil para provar afirmações quanto à eficiência e correção de algoritmos

Definição

Consistem em inferir uma regra geral a partir de instâncias particulares, indo então do efeito às causas, das consequências ao princípio, da experiência à teoria.

Formas de Inferência

Dedutiva

- Consiste em chegar a uma conclusão a partir de premissas (regras e fatos)
- A conclusão deve necessariamente ser verdadeira, caso todas as premissas sejam verdadeiras
- Ex:
  - Premissa: se chover, a estrada estará molhada
  - Premissa: choveu
  - Dedução: a estrada está molhada

Formas de Inferência

Indutiva

- Consiste de, após considerar um número suficiente de exemplos, concluir uma regra geral
- Constrói uma conclusão baseada em experiência
- Ex:
  - Premissas: todas as vezes em que vi chover, a estrada estava molhada
  - Indução: se chover, a estrada estará molhada
  - Naturalmente, a conclusão não é definitiva, pois contém informação (de que não há chuva sem estrada molhada) não dada pelas premissas

Formas de Inferência

Abdutiva

- Consiste de encontrar a hipótese mais provável para uma determinada premissa observada
- Ex:
  - Premissa: se chover, a estrada estará molhada
  - Premissa: a estrada está molhada
  - Abdução: (provavelmente) choveu
- Trata-se da inferência a favor da melhor explicação

Formas de Inferência

Dedução

$$A \quad \rightarrow \quad B$$

Conheço a regra

Formas de Inferência

Dedução

$$A \quad \rightarrow \quad B$$

Sei que A é verdade

Formas de Inferência

Dedução

$$A \rightarrow B$$

Então infiro que B é verdade

Formas de Inferência

Indução

B

Por várias vezes, vi B

Formas de Inferência

Indução

A B

em decorrência de A

Formas de Inferência

Indução

$$A \rightarrow B$$

Infiro então que provavelmente $A \rightarrow B$
(incerteza)

Formas de Inferência

Abdução

$$A \quad \rightarrow \quad B$$

Conheço a regra

Formas de Inferência

Abdução

$$A \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}$$

Sei que B é verdade

Formas de Inferência

Abdução

$$A \rightarrow B$$

Então infiro que A é provavelmente verdade (incerteza)

Inferência e Algoritmos

- E o que isso tudo tem a ver com algoritmos?

Inferência e Algoritmos

- E o que isso tudo tem a ver com algoritmos?
- Vejamos como geralmente criamos algoritmos para um determinado problema:

Inferência e Algoritmos

- E o que isso tudo tem a ver com algoritmos?
- Vejamos como geralmente criamos algoritmos para um determinado problema:
  - Olhamos alguns exemplos de entrada + saída esperada

Inferência e Algoritmos

- E o que isso tudo tem a ver com algoritmos?
- Vejamos como geralmente criamos algoritmos para um determinado problema:
  - Olhamos alguns exemplos de entrada + saída esperada
  - Criamos um procedimento que, para esses casos, faça com que a entrada leve à saída

Inferência e Algoritmos

- E o que isso tudo tem a ver com algoritmos?
- Vejamos como geralmente criamos algoritmos para um determinado problema:
  - Olhamos alguns exemplos de entrada + saída esperada
  - Criamos um procedimento que, para esses casos, faça com que a entrada leve à saída
- Naturalmente, isso ocorre para problemas ainda não especificados matematicamente
  - Do contrário, basta seguirmos a especificação (fórmula)

Mais de perto...

- Olhamos alguns exemplos de entrada + saída esperada
- Criamos um procedimento que, para esses casos, faça com que a entrada leve à saída

Inferência e Algoritmos

Mais de perto...

- Olhamos alguns exemplos de entrada + saída esperada
- Criamos um procedimento que, para esses casos, faça com que a entrada leve à saída

Ou seja...

- A partir de N pares $\{[E_i, S_i], 1 \leq i \leq N\}$
- Inferimos que, via nosso procedimento P, $\{E_i \xrightarrow{\text{P}} S_i, \forall [E_i, S_i]\}$

Inferência e Algoritmos

Nossa inferência:

- A partir de N pares $\{[E_i, S_i], 1 \leq i \leq N\}$
- Inferimos que, via nosso procedimento P, $\{E_i \xrightarrow{P} S_i, \forall [E_i, S_i]\}$

- Que tipo de raciocínio é esse?
  - (   ) Dedutivo
  - (   ) Indutivo
  - (   ) Abdutivo

Inferência e Algoritmos

Nossa inferência:

- A partir de N pares $\{[E_i, S_i], 1 \leq i \leq N\}$
- Inferimos que, via nosso procedimento P, $\{E_i \xrightarrow{\text{P}} S_i, \forall [E_i, S_i]\}$

- Que tipo de raciocínio é esse?
  - ( ) Dedutivo
  - ($\times$) Indutivo
  - ( ) Abdutivo

Inferência e Algoritmos

- Só que o raciocínio indutivo é incerto. Não podemos confiar plenamente nele.

Inferência e Algoritmos

- Só que o raciocínio indutivo é incerto. Não podemos confiar plenamente nele.
- Temos então que achar uma forma de aplicar o raciocínio dedutivo
  - Provando assim que a conjectura $E_i \xrightarrow{\text{P}} S_i$ é verdadeira para todo $[E_i, S_i]$

- Só que o raciocínio indutivo é incerto. Não podemos confiar plenamente nele.
- Temos então que achar uma forma de aplicar o raciocínio dedutivo
  - Provando assim que a conjectura $E_i \xrightarrow{\text{P}} S_i$ é verdadeira para todo $[E_i, S_i]$
- Embora possamos buscar um contra-exemplo para a conjectura, provando sua falsidade, provar sua veracidade é mais difícil
  - Pois, a menos que possamos testar todos os exemplos possíveis, ainda restará dúvida

Indução Finita

- Nesse sentido, uma técnica que nos permite provar nossa conjectura é a Indução Finita.

Princípio da Indução Finita (Fraca)

Sejam P_n afirmações associadas a cada inteiro positivo $n \geq k$. Se P_k for verdadeira e, para cada inteiro positivo $j \geq k$ pudermos mostrar que, se P_j for verdadeira então P_{j+1} também o será, então P_n será verdadeira para todo inteiro $n \geq k$.

Indução Finita

- E, formalmente...

Princípio da Indução Finita (Fraca)

Para provarmos que P_n é verdadeira para todo $n \geq k$, teremos que provar que:

1. P é verdadeira para algum $k \geq 1$ (P_k é verdadeira)
2. Para todo $j \geq k$, se P for verdadeira para j então também o será para $j+1$ ($P_j \Rightarrow P_{j+1}$)

Indução Finita (Fraca)

Em outras palavras...

1. Mostramos que P é verdadeira para um determinado $k \geq 1$ (normalmente, $k = 1$)
2. Assumimos que P é verdadeira para um inteiro arbitrário $j \geq k$ ($j = k$ já provamos)
3. Baseados nessa hipótese, mostramos que P_{j+1} é verdadeira, ou seja, provamos que P é verdadeira para $j + 1$

   E assim conseguimos mostrar que P é verdadeira para qualquer inteiro $\geq k$

Indução Finita (Fraca)

Partes do Processo de Indução Finita

- **Base**: demonstrar que P_1 (ou P_k, para um determinado $k \geq 1$) é verdadeira (passo 1 no slide anterior)
- **Hipótese de indução**: assumir que P_j é verdadeira
- **Passo indutivo**: estabelecer que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ é verdadeira (passo 3)

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

- Demonstramos que P vale para um determinado k
- Demonstramos que o fato de P valer para algum $j \geq k$ arbitrário implica valer para $j+1$
- Então segue que P valendo para k faz com que ela valha para $k+1$ também (P_{k+1} é verdadeiro)
- P valer para $k+1$, por sua vez, implica valer para $k+2$, e assim por diante...

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$P_k \qquad P_{k+1} \qquad P_{k+2} \qquad \cdots \qquad P_j \qquad P_{j+1} \qquad \cdots$$

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$P_k \qquad P_{k+1} \qquad P_{k+2} \qquad \cdots \qquad P_j \qquad P_{j+1} \qquad \cdots$$

Provamos a base

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$P_k \qquad P_{k+1} \qquad P_{k+2} \qquad \cdots \qquad P_j \qquad P_{j+1} \qquad \cdots$$

A partir da base, e de que $P_j \Rightarrow P_{j+1}$, temos o segundo

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[r, bend left] & P_{k+1} \arrow[r, bend left] & P_{k+2} & \cdots & P_j & P_{j+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

A partir do segundo, e de que $P_j \Rightarrow P_{j+1}$, temos o terceiro

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[r, bend left] & P_{k+1} \arrow[r, bend left] & P_{k+2} \arrow[r, bend left] & \cdots & P_j & P_{j+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

E assim por diante...

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$\begin{tikzcd} P_k \arrow[r, bend left] & P_{k+1} \arrow[r, bend left] & P_{k+2} \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & P_j & P_{j+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

E assim por diante...

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$\begin{tikzcd}
P_k \arrow[r, bend left] & P_{k+1} \arrow[r, bend left] & P_{k+2} \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & P_j \arrow[r, bend left] & P_{j+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

E assim por diante...

Indução Finita (Fraca)

E por que isso funciona?

Temos então um efeito dominó:

$$\begin{tikzcd}
P_k \arrow[r, bend left] & P_{k+1} \arrow[r, bend left] & P_{k+2} \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & P_j \arrow[r, bend left] & P_{j+1} \arrow[r, bend left] & \cdots
\end{tikzcd}$$

E assim por diante...

Indução Finita (Fraca)

E por que indução fraca?

- Essa formulação é denominada princípio da indução (finita) fraca, porque apenas P_j é assumida como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}

Indução Finita (Fraca)

E por que indução fraca?

- Essa formulação é denominada princípio da indução (finita) fraca, porque apenas P_j é assumida como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}

Mas isso é realmente indução?

Indução Finita (Fraca)

E por que indução fraca?

- Essa formulação é denominada princípio da indução (finita) fraca, porque apenas P_j é assumida como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}

Mas isso é realmente indução?

- Não. O processo é, de fato, dedutivo

Indução Finita (Fraca)

E por que indução fraca?

- Essa formulação é denominada princípio da indução (finita) fraca, porque apenas P_j é assumida como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}

Mas isso é realmente indução?

- Não. O processo é, de fato, dedutivo
- Mas então, por que *indução* finita?

Indução Finita (Fraca)

E por que indução fraca?

- Essa formulação é denominada princípio da indução (finita) fraca, porque apenas P_j é assumida como verdadeiro para se provar a veracidade de P_{j+1}

Mas isso é realmente indução?

- Não. O processo é, de fato, dedutivo
- Mas então, por que *indução* finita?
  - Porque tentamos demonstrar uma conjectura que possivelmente foi formulada por um raciocínio indutivo (como nosso algoritmo $\{E_i \xrightarrow{P} S_i, \forall[E_i, S_i]\}$)

Indução Finita (Fraca)

E qual a utilidade disso?

- O princípio da Indução Finita é uma implicação, cuja conjectura é da forma:

  "a afirmação P é verdadeira para todos os inteiros positivos"

- Assim, é uma técnica útil quando queremos demonstrar que alguma propriedade é válida para qualquer inteiro positivo

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j+1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j+1) - 1)$

Incluímos o penúltimo elemento de P_{j+1}

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$
    $= \underline{1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1)} + (2(j + 1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j + 1) - 1)$

Usamos que isso tudo é $S(j)$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j + 1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j + 1) - 1)$
    $= j^2 + (2(j + 1) - 1)$

E assumimos
$P_j : S(j) = j^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j + 1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j + 1) - 1)$
    $= j^2 + (2(j + 1) - 1)$
    $= j^2 + 2j + 1$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j+1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j+1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j+1) - 1)$
    $= j^2 + (2(j+1) - 1)$
    $= j^2 + 2j + 1$
    $= (j+1)^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j+1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j+1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j+1) - 1)$
    $= j^2 + (2(j+1) - 1)$
    $= j^2 + 2j + 1$
    $= (j+1)^2 \Rightarrow S(j+1) = (j+1)^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$
    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j + 1) - 1)$
    $= S(j) + (2(j + 1) - 1)$
    $= j^2 + (2(j + 1) - 1)$
    $= j^2 + 2j + 1$
    $= (j + 1)^2 \Rightarrow S(j + 1) = (j + 1)^2 \Rightarrow P_{j+1}$ é verdadeira

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para $n \geq 1$
  - Nesse caso, $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, e queremos mostrar P_n: $S(n) = n^2$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = 1^2$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = j^2$ (assumo verdadeira)
  - **Passo**: $S(j + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(j + 1) - 1)$

    $= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2j - 1) + (2(j + 1) - 1)$

    $= S(j) + (2(j + 1) - 1)$

    $= j^2 + (2(j + 1) - 1)$

    $= j^2 + 2j + 1$

    $= (j + 1)^2 \Rightarrow S(j + 1) = (j + 1)^2 \Rightarrow P_{j+1}$ é verdadeira

Note que, para provarmos P_{j+1} usamos $P_j : S(j) = j^2$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove

  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove

  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove

  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove

  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$

    $= S(j) + (j+1)$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$
    $$= S(j) + (j+1) = \frac{j(j+1)}{2} + (j+1)$$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$
    $$= S(j) + (j+1) = \frac{j(j+1)}{2} + (j+1)$$
    $$= \frac{j(j+1) + 2(j+1)}{2}$$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove

  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$

    $$= S(j) + (j+1) = \frac{j(j+1)}{2} + (j+1)$$

    $$= \frac{j(j+1) + 2(j+1)}{2} = \frac{(j+1)(j+2)}{2}$$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$
    $$= S(j) + (j+1) = \frac{j(j+1)}{2} + (j+1)$$
    $$= \frac{j(j+1) + 2(j+1)}{2} = \frac{(j+1)(j+2)}{2}$$
    $$= \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}$$

Indução Finita (Fraca) – Exemplo

- Seja $S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$. Prove
  $$P_n : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
  - **Base**: $P_1 : S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (ok)
  - **Hipótese**: $P_j : S(j) = \dfrac{j(j+1)}{2}$
  - **Passo**: $S(j+1) = 1 + 2 + \ldots + j + (j+1)$
  $$= S(j) + (j+1) = \frac{j(j+1)}{2} + (j+1)$$
  $$= \frac{j(j+1) + 2(j+1)}{2} = \frac{(j+1)(j+2)}{2}$$
  $$= \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2} \Rightarrow S(j+1) = \frac{(j+1)((j+1)+1)}{2}$$

Indução Finita (Fraca)

Muito cuidado!

- É fácil se enganar ao construir uma prova por indução
- Quando demonstramos que P_{j+1} é verdadeira, sem usarmos a hipótese P_j, não estamos fazendo uma prova por indução finita
- Nesse caso, estamos fazendo uma prova direta de P_{j+1}, onde $j+1$ é arbitrário

Indução Finita

- Em alguns problemas, contudo, para se provar que P_{j+1} é verdadeira, temos que assumir a veracidade de todas as P_i, para $k \leq i \leq j$

Princípio da Indução Finita (Forte)

Sejam P_n afirmações associadas a cada inteiro positivo $n \geq k$. Se P_k for verdadeira e, para cada inteiro positivo $j \geq k$ pudermos mostrar que, se $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ forem verdadeiras então P_{j+1} também o será, então P_n será verdadeira para todo inteiro $n \geq k$.

Indução Finita

- E, formalmente...

Princípio da Indução Finita (Forte)

Para provarmos que P_n é verdadeira para todo $n \geq k$, teremos que provar que:

1. P é verdadeira para algum $k \geq 1$ (P_k é verdadeira)
2. Para todo $j \geq k$, se $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ forem verdadeiras, então P também o será para $j+1$ $(P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j \Rightarrow P_{j+1})$

Indução Finita (Forte)

Em outras palavras...

1. Mostramos que P é verdadeira para um determinado $k \geq 1$ (normalmente, $k = 1$)
2. Dado um inteiro arbitrário j, assumimos que P é verdadeira para todo $i, k \leq i \leq j$
3. Baseados nessa hipótese, mostramos que P_{j+1} é verdadeira, ou seja, provamos que P é verdadeira para $j + 1$

E assim conseguimos mostrar que P é verdadeira para qualquer inteiro $n \geq k$

Indução Finita (Forte)

Partes do Processo de Indução Finita

- **Base**: demonstrar que P_1 (ou P_k, para um determinado $k \geq 1$) é verdadeira (passo 1 no slide anterior)
- **Hipótese de indução**: assumir que $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j$ são verdadeiras
- **Passo indutivo**: estabelecer que $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j \rightarrow P_{j+1}$ é verdadeira (passo 3)

Indução Finita Fraca × Forte

Afinal, qual a diferença entre elas?

- Na fraca, devemos provar, para um inteiro arbitrário j, que P_{j+1} é verdadeira, com base somente na premissa de que P_j é verdadeira

Indução Finita Fraca × Forte

Afinal, qual a diferença entre elas?

- Na fraca, devemos provar, para um inteiro arbitrário j, que P_{j+1} é verdadeira, com base somente na premissa de que P_j é verdadeira
- Na forte, devemos assumir que P_i é verdadeira para todo inteiro i entre r e um inteiro positivo arbitrário j, para então provar que P_{j+1} é verdadeira.

Indução Finita Fraca $\times$ Forte

- A forte recebe esse nome por nos dar mais base, para os casos em que não conseguimos provar com a fraca.

Indução Finita Fraca $\times$ Forte

- A forte recebe esse nome por nos dar mais base, para os casos em que não conseguimos provar com a fraca.
- Então a forte é melhor?

Indução Finita Fraca × Forte

- A forte recebe esse nome por nos dar mais base, para os casos em que não conseguimos provar com a fraca.
- Então a forte é melhor?
- Não. Elas são totalmente equivalentes

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que para todo $n \geq 2$, n ou é um número primo ou é o produto de números primos.

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que para todo $n \geq 2$, n ou é um número primo ou é o produto de números primos.
  - Nesse caso, P_i é a afirmação de que i ou é um número primo ou o produto de primos

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que para todo $n \geq 2$, n ou é um número primo ou é o produto de números primos.
  - Nesse caso, P_i é a afirmação de que i ou é um número primo ou o produto de primos
  - **Base**: P_2 é verdadeira (2 é primo)

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que para todo $n \geq 2$, n ou é um número primo ou é o produto de números primos.
  - Nesse caso, P_i é a afirmação de que i ou é um número primo ou o produto de primos
  - **Base**: P_2 é verdadeira (2 é primo)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, suponho que, para todo inteiro $2 \leq i \leq j$, P_i é verdadeira, ou seja, i é primo ou o produto de primos

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que para todo $n \geq 2$, n ou é um número primo ou é o produto de números primos.
  - Nesse caso, P_i é a afirmação de que i ou é um número primo ou o produto de primos
  - **Base**: P_2 é verdadeira (2 é primo)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, suponho que, para todo inteiro $2 \leq i \leq j$, P_i é verdadeira, ou seja, i é primo ou o produto de primos
    - Em outras palavras, assumo que todo inteiro entre 2 e j ou é primo ou é o produto de primos

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j + 1$.

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j+1$.

  Se $j+1$ for primo, o resultado está correto.

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j+1$.

  Se $j+1$ for primo, o resultado está correto.

  Se não for primo, então podemos escrevê-lo como $j+1=ab$ (pois, do contrário, $j+1$ seria primo)

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j+1$.

  Se $j+1$ for primo, o resultado está correto.

  Se não for primo, então podemos escrevê-lo como $j+1 = ab$ (pois, do contrário, $j+1$ seria primo)

  Nesse caso, $1 < a < j+1$ e $1 < b < j+1$, pois sua multiplicação não pode passar de $j+1$, e se um deles for 1 estaremos dizendo que $j+1 = j+1$, o que é óbvio.

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j + 1$.

  Se $j + 1$ for primo, o resultado está correto.

  Se não for primo, então podemos escrevê-lo como $j + 1 = ab$ (pois, do contrário, $j + 1$ seria primo)

  Nesse caso, $1 < a < j + 1$ e $1 < b < j + 1$, pois sua multiplicação não pode passar de $j + 1$, e se um deles for 1 estaremos dizendo que $j + 1 = j + 1$, o que é óbvio.

  Isso equivale a dizer que $2 \leq a \leq j$ e $2 \leq b \leq j$, pois a e b são inteiros

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j + 1$.

  Se $j + 1$ for primo, o resultado está correto.

  Se não for primo, então podemos escrevê-lo como $j + 1 = ab$ (pois, do contrário, $j + 1$ seria primo)

  Nesse caso, $1 < a < j + 1$ e $1 < b < j + 1$, pois sua multiplicação não pode passar de $j + 1$, e se um deles for 1 estaremos dizendo que $j + 1 = j + 1$, o que é óbvio.

  Isso equivale a dizer que $2 \leq a \leq j$ e $2 \leq b \leq j$, pois a e b são inteiros

  Aplicando-se a hipótese de indução em a, temos que ele é primo ou o produto de primos. O mesmo vale para b.

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo**: Vejamos agora $j + 1$.

  Se $j + 1$ for primo, o resultado está correto.

  Se não for primo, então podemos escrevê-lo como $j + 1 = ab$ (pois, do contrário, $j + 1$ seria primo)

  Nesse caso, $1 < a < j + 1$ e $1 < b < j + 1$, pois sua multiplicação não pode passar de $j + 1$, e se um deles for 1 estaremos dizendo que $j + 1 = j + 1$, o que é óbvio.

  Isso equivale a dizer que $2 \leq a \leq j$ e $2 \leq b \leq j$, pois a e b são inteiros

  Aplicando-se a hipótese de indução em a, temos que ele é primo ou o produto de primos. O mesmo vale para b.

  Assim, ab é o produto de primos (2 ou mais, nesse caso), e a demonstração se completa

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Note que, nesse exemplo, não conseguimos provar P usando apenas j
  - Precisamos apelar a dois inteiros arbitrários a e b, entre 2 e j
  - Como não sabemos quais usaremos, tivemos que assumir que a hipótese valia para todos os inteiros entre 2 e j
- É então nisso que reside a força dessa indução
  - Não ficamos presos a j, mas sim a um intervalo de valores, nos dando mais possibilidades para a demonstração

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$ (ok)

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$ (ok)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, P_i é verdadeira para todo $8 \leq i \leq j$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$ (ok)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, P_i é verdadeira para todo $8 \leq i \leq j$
  - **Passo**: Por conveniência, vamos demonstrar outros 2 resultados:

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$ (ok)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, P_i é verdadeira para todo $8 \leq i \leq j$
  - **Passo**: Por conveniência, vamos demonstrar outros 2 resultados:

    $P_9 = 3 + 3 + 3$ (ok)

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5
  - **Base**: $P_8 = 8 = 3 + 5$ (ok)
  - **Hipótese**: Dado um inteiro arbitrário j, P_i é verdadeira para todo $8 \leq i \leq j$
  - **Passo**: Por conveniência, vamos demonstrar outros 2 resultados:

    $P_9 = 3 + 3 + 3$ (ok)

    $P_{10} = 5 + 5$ (ok)

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

Precisamos escrever isso em termos de algo no intervalo $8 \leq i \leq j$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

  Temos então que $(j + 1) - 3 \geq 11 - 3$

Precisamos escrever isso em termos de algo no intervalo $8 \leq i \leq j$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

  Temos então que $(j + 1) - 3 \geq 11 - 3$

  $\Rightarrow j - 2 \geq 8$

Precisamos escrever isso em termos de algo no intervalo $8 \leq i \leq j$

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

  Temos então que $(j + 1) - 3 \geq 11 - 3$

  $\Rightarrow j - 2 \geq 8$

  Como $8 \leq j - 2 < j$ então, pela hipótese de indução, P_{j-2} é verdadeira, e posso escrever $j - 2$ como uma combinação de 3 e 5

Indução Finita (Forte) – Exemplo

- **Passo** (cont.): Podemos então assumir que $j + 1 \geq 11$

  Temos então que $(j + 1) - 3 \geq 11 - 3$

  $\Rightarrow j - 2 \geq 8$

  Como $8 \leq j - 2 < j$ então, pela hipótese de indução, P_{j-2} é verdadeira, e posso escrever $j - 2$ como uma combinação de 3 e 5

  Como $j + 1 = (j - 2) + 3$, então $P_{j+1} = P_{j-2} + 3$, e como P_{j-2} é uma combinação de 3 e 5, adicionar 3 faz com que P_{j+1} também o seja.

Indução Finita

Variações

- Inicialmente, vimos casos em que:
  - Mostramos P_k, assumimos $P_j, j \geq k$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (fraca)
  - Mostramos P_k, assumimos $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j, j \geq k$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (forte)

Indução Finita

Variações

- Inicialmente, vimos casos em que:
  - Mostramos P_k, assumimos $P_j, j \geq k$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (fraca)
  - Mostramos P_k, assumimos $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_j, j \geq k$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (forte)
- Caso clássico

Indução Finita

Variações

- Contudo, podemos ampliar a base, por exemplo:
  - Mostramos P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, assumimos $P_j, j \geq k+2$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (fraca)
  - Mostramos P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, assumimos $P_{k+2}, P_{k+3}, \ldots, P_j, j \geq k+2$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (forte)

Indução Finita

Variações

- Contudo, podemos ampliar a base, por exemplo:
  - Mostramos P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, assumimos $P_j, j \geq k+2$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (fraca)
  - Mostramos P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, assumimos $P_{k+2}, P_{k+3}, \ldots, P_j, j \geq k+2$ e mostramos que $P_j \rightarrow P_{j+1}$ (forte)
- Ou seja, "esticamos" a base até um valor que nos ajude na prova, como no último exemplo visto

Indução Finita

Variações

- E nada nos impede de fazer:
  - Mostramos P_k, assumimos P_{j-1}, $j - 1 \geq k$ e mostramos que $P_{j-1} \rightarrow P_j$ (fraca)
  - Mostramos P_k, assumimos $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{j-1}$, $j - 1 \geq k$ e mostramos que $P_{j-1} \rightarrow P_j$ (forte)

Indução Finita

Variações

- E nada nos impede de fazer:
  - Mostramos P_k, assumimos P_{j-1}, $j-1 \geq k$ e mostramos que $P_{j-1} \rightarrow P_j$ (fraca)
  - Mostramos P_k, assumimos $P_k, P_{k+1}, \ldots, P_{j-1}$, $j-1 \geq k$ e mostramos que $P_{j-1} \rightarrow P_j$ (forte)
- Nesse caso, apenas fizemos uma mudança de variável, que pode vir a facilitar a prova matemática.

Referências

- Gersting, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 3a ed. LTC. 1993.
- Manber, Udi. Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Addison-Wesley. 1989.
- Ziviani, Nivio. Projeto de Algoritmos: com implementações em Java e C++. Cengage. 2007.
- Manber, Udi. Using Induction to Design Algorithms. Communications of the ACM, 31(11). 1988.

Referências

- https://pt.wikipedia.org/wiki/Abdução_(lógica_filosófica)
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Método_dedutivo
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Método_indutivo

Aula 05 – Indução Fraca e Forte

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023