Aula 03 – Análise Assintótica de Algoritmos: Notação O e o

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023

Crescimento Assintótico de Funções

- O custo da solução aumenta com o tamanho n do problema

Crescimento Assintótico de Funções

- O custo da solução aumenta com o tamanho n do problema
- O tamanho n fornece uma medida da dificuldade para resolver o problema
  - Tempo necessário para resolver o problema aumenta quando n cresce

Crescimento Assintótico de Funções

- O custo da solução aumenta com o tamanho n do problema
- O tamanho n fornece uma medida da dificuldade para resolver o problema
  - Tempo necessário para resolver o problema aumenta quando n cresce
- Exemplo:
  - Número de comparações para achar o maior elemento de um arranjo (array) ou para ordená-lo aumenta com o tamanho da entrada n.

Crescimento Assintótico de Funções

- A escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno

Crescimento Assintótico de Funções

- A escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno
  - O problema é quando n cresce

Crescimento Assintótico de Funções

- A escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno
  - O problema é quando n cresce
- Por isso, é usual analisar o comportamento das funções de custo quando n é bastante grande

Crescimento Assintótico de Funções

- A escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno
  - O problema é quando n cresce
- Por isso, é usual analisar o comportamento das funções de custo quando n é bastante grande
  - Analisa-se o comportamento assintótico das funções de custo

Crescimento Assintótico de Funções

- A escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno
  - O problema é quando n cresce
- Por isso, é usual analisar o comportamento das funções de custo quando n é bastante grande
  - Analisa-se o comportamento assintótico das funções de custo
  - Representa o limite do comportamento do custo quando n cresce

Crescimento Assintótico de Funções

O que significa "Comportamento Assintótico"?

O que significa "Comportamento Assintótico"?

- O comportamento assintótico descreve uma função ou expressão com um limite ou assíntota definidos

Crescimento Assintótico de Funções

O que significa "Comportamento Assintótico"?

- O comportamento assintótico descreve uma função ou expressão com um limite ou assíntota definidos
  - A função pode se aproximar desse limite, na medida em que a entrada muda, mas nunca o alcançará

Crescimento Assintótico de Funções

O que significa "Comportamento Assintótico"?

- O comportamento assintótico descreve uma função ou expressão com um limite ou assíntota definidos
  - A função pode se aproximar desse limite, na medida em que a entrada muda, mas nunca o alcançará
- Assíntota?

Crescimento Assintótico de Funções

O que significa "Comportamento Assintótico"?

- O comportamento assintótico descreve uma função ou expressão com um limite ou assíntota definidos
  - A função pode se aproximar desse limite, na medida em que a entrada muda, mas nunca o alcançará
- Assíntota?
  - A linha da qual uma curva se aproxima enquanto caminha ao infinito

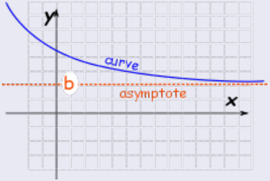
Comportamento Assintótico

Assíntotas

Comportamento Assintótico

Assíntotas

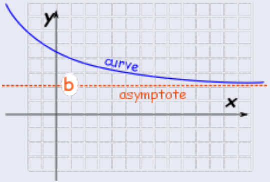
Horizontais



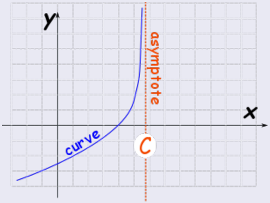
Comportamento Assintótico

Assíntotas

Horizontais



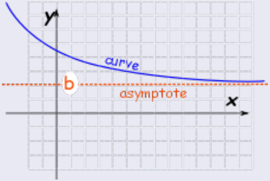
Verticais



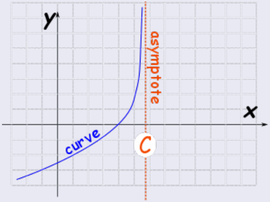
Comportamento Assintótico

Assíntotas

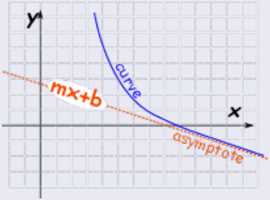
Horizontais



Verticais



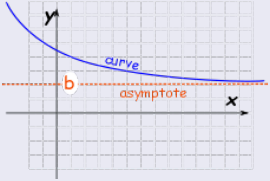
Oblíquas



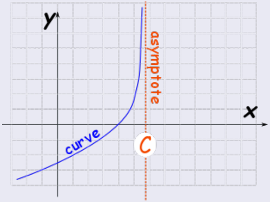
Comportamento Assintótico

Assíntotas

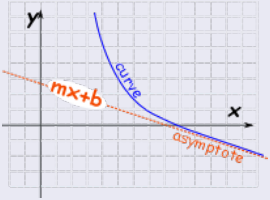
Horizontais



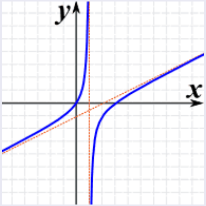
Verticais



Oblíquas



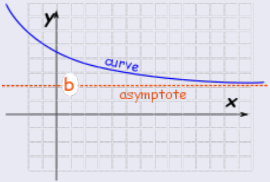
- Ex: $\frac{x-3x}{2x-2}$



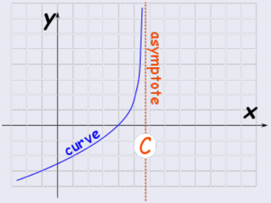
Comportamento Assintótico

Assíntotas

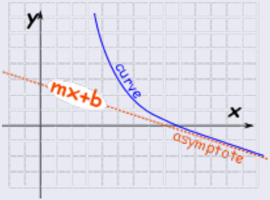
Horizontais



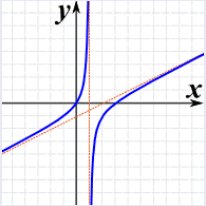
Verticais



Oblíquas



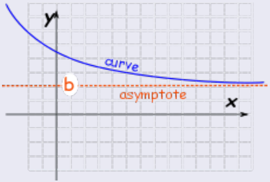
- Ex: $\frac{x-3x}{2x-2}$
  - Possui uma assíntota vertical em $x = 1$



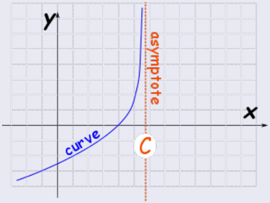
Comportamento Assintótico

Assíntotas

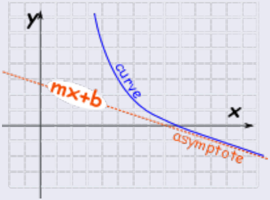
Horizontais



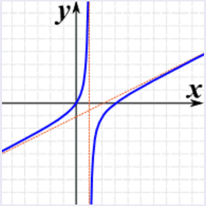
Verticais



Oblíquas



- Ex: $\frac{x-3x}{2x-2}$
  - Possui uma assíntota vertical em $x = 1$
  - E uma oblíqua em $y = \frac{x}{2} - 1$



Comportamento Assintótico

E o que isso tem a ver com complexidade?

Comportamento Assintótico

E o que isso tem a ver com complexidade?

- Seja $f(n)$ a função de complexidade de um algoritmo A
  - O comportamento assintótico de $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo (complexidade) de A quando n cresce sem restrições

Comportamento Assintótico

E o que isso tem a ver com complexidade?

- Seja $f(n)$ a função de complexidade de um algoritmo A
  - O comportamento assintótico de $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo (complexidade) de A quando n cresce sem restrições
  - Lembrando que a função de complexidade geralmente considera apenas algumas operações elementares, ou mesmo uma única operação elementar (ex: o número de comparações)

Comportamento Assintótico

E o que isso tem a ver com complexidade?

- Seja $f(n)$ a função de complexidade de um algoritmo A
  - O comportamento assintótico de $f(n)$ representa o limite do comportamento do custo (complexidade) de A quando n cresce sem restrições
  - Lembrando que a função de complexidade geralmente considera apenas algumas operações elementares, ou mesmo uma única operação elementar (ex: o número de comparações)
- A complexidade assintótica relata o crescimento assintótico das operações consideradas

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- Definir limites para o comportamento do algoritmo, identificando assim quando o barco vai afundar...

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- Definir limites para o comportamento do algoritmo, identificando assim quando o barco vai afundar...
  - Ex: 1 milhão (10^6) de operações por segundo

Função de custo	10	20	30	40	50	60
n	0,00001s	0,00002s	0,00003s	0,00004s	0,00005s	0,00006s
n^2	0,0001s	0,0004s	0,0009s	0,0016s	0,0025s	0,0036s
n^3	0,001s	0,008s	0,027s	0,064s	0,125s	0,216s
n^5	0,1s	3,2s	24,3s	1,7min	5,2min	12,96min
2^n	0,001s	1,04s	17,9min	12,7dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059s	58min	6,5anos	3855séc.	10^8séc.	10^{13}séc.

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- A definição de um limite nos dá uma caracterização simples da eficiência do algoritmo

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- A definição de um limite nos dá uma caracterização simples da eficiência do algoritmo
  - Mesmo podendo determinar sua complexidade exata, o cálculo dessa precisão extra pode não valer o esforço

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- A definição de um limite nos dá uma caracterização simples da eficiência do algoritmo
  - Mesmo podendo determinar sua complexidade exata, o cálculo dessa precisão extra pode não valer o esforço
  - Para entradas grandes, as constantes multiplicativas e termos de menor ordem são dominados pelos efeitos do tamanho da entrada

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- A definição de um limite nos dá uma caracterização simples da eficiência do algoritmo
  - Mesmo podendo determinar sua complexidade exata, o cálculo dessa precisão extra pode não valer o esforço
  - Para entradas grandes, as constantes multiplicativas e termos de menor ordem são dominados pelos efeitos do tamanho da entrada
- Nos permite também comparar o desempenho relativo de algoritmos alternativos

Comportamento Assintótico

E para que isso serve?

- A definição de um limite nos dá uma caracterização simples da eficiência do algoritmo
  - Mesmo podendo determinar sua complexidade exata, o cálculo dessa precisão extra pode não valer o esforço
  - Para entradas grandes, as constantes multiplicativas e termos de menor ordem são dominados pelos efeitos do tamanho da entrada
- Nos permite também comparar o desempenho relativo de algoritmos alternativos
  - Nos diz qual será melhor quando a entrada cresce

Relacionamento Assintótico

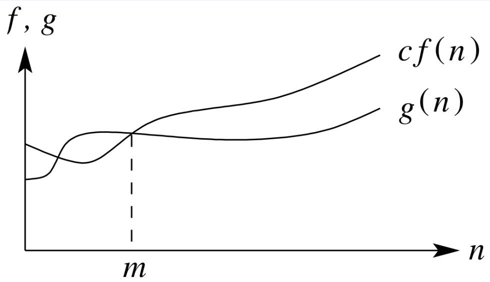
Definição:

- Uma função $f(n)$ domina assintoticamente outra função $g(n)$ se existirem duas constantes positivas c e m tais que, para $n \geq m$, tem-se $|g(n)| \leq c \times |f(n)|$.

Relacionamento Assintótico

Definição:

- Uma função $f(n)$ domina assintoticamente outra função $g(n)$ se existirem duas constantes positivas c e m tais que, para $n \geq m$, tem-se $|g(n)| \leq c \times |f(n)|$.



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
  - $|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
  - $|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$
  - Para $c = 1$ e $m = 0$, temos que $|g(n)| \leq |f(n)|$. Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
  - $|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$
  - Para $c = 1$ e $m = 0$, temos que $|g(n)| \leq |f(n)|$. Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.
- $g(n) = n$ e $f(n) = -n^2$

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
  - $|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$
  - Para $c = 1$ e $m = 0$, temos que $|g(n)| \leq |f(n)|$. Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.
- $g(n) = n$ e $f(n) = -n^2$
  - $|n| \leq |-n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser módulo, o sinal não importa)

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- $g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
  - $|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$
  - Para $c = 1$ e $m = 0$, temos que $|g(n)| \leq |f(n)|$. Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.
- $g(n) = n$ e $f(n) = -n^2$
  - $|n| \leq |-n^2|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser módulo, o sinal não importa)
  - Para $c = 1$ e $m = 0$, temos que $|g(n)| \leq |f(n)|$. Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.

Relacionamento Assintótico

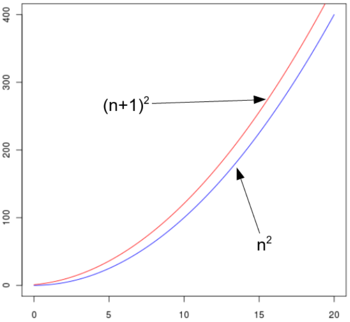
Quem domina quem?

- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

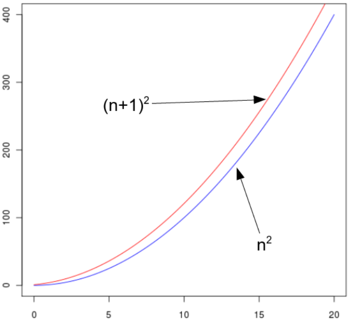
- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - Melhor por em um gráfico



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

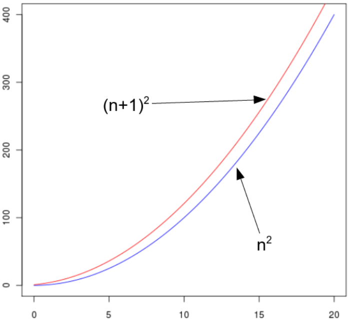
- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - Melhor por em um gráfico
  - $|n^2| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

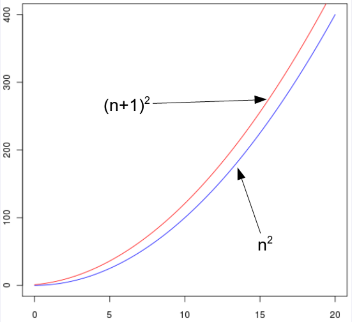
- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - Melhor por em um gráfico
  - $|n^2| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$
  - $g(n)$ domina $f(n)$



Relacionamento Assintótico

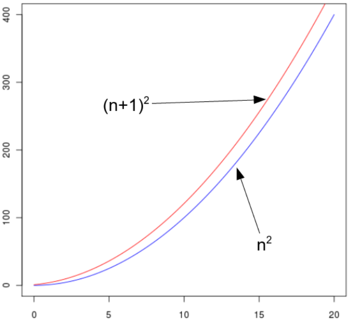
Quem domina quem?

- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - Melhor por em um gráfico
  - $|n^2| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$
  - $g(n)$ domina $f(n)$
- Será somente isso?



Quem domina quem?

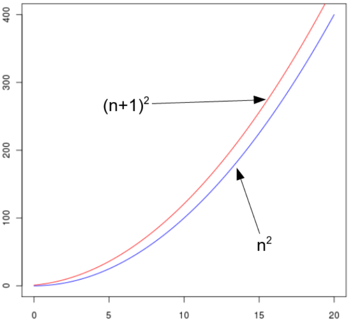
- $g(n) = (n+1)^2$ e $f(n) = n^2$
  - Melhor por em um gráfico
  - $|n^2| \leq |(n+1)^2|$ para $n \geq 0$
  - $g(n)$ domina $f(n)$
- Será somente isso?
  - Não há como $f(n)$ dominar $g(n)$?



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

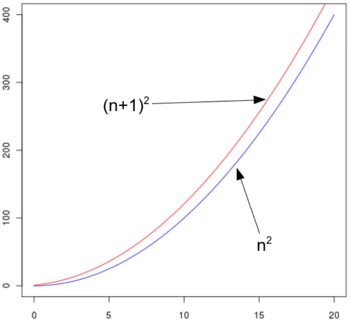
- Lembre que a definição envolve também uma constante



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

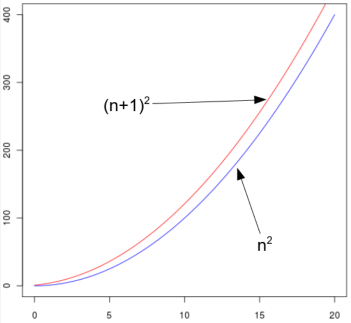
- Lembre que a definição envolve também uma constante
- Suponha que queremos $g(n) \leq cf(n)$



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

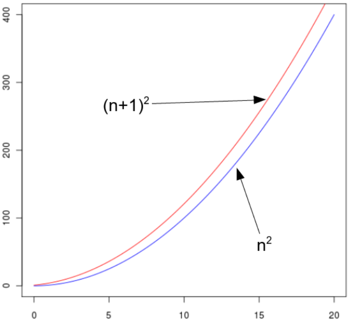
- Lembre que a definição envolve também uma constante
- Suponha que queremos $g(n) \leq cf(n)$
- Então $|(n+1)^2| \leq |cn^2|$



Relacionamento Assintótico

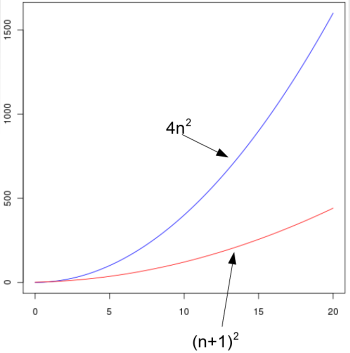
Quem domina quem?

- Lembre que a definição envolve também uma constante
- Suponha que queremos $g(n) \leq cf(n)$
- Então $|(n+1)^2| \leq |cn^2|$
- Mas, para isso, basta que $|(n+1)^2| \leq |(\sqrt{c}n)^2|$ ou $|n+1| \leq |\sqrt{c}n|$



Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

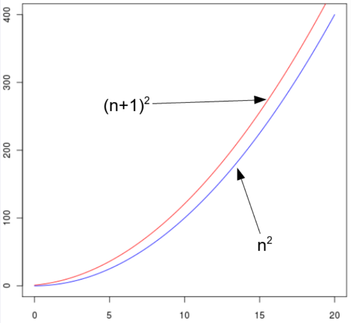


- Lembre que a definição envolve também uma constante
- Suponha que queremos $g(n) \leq cf(n)$
- Então $|(n+1)^2| \leq |cn^2|$
- Mas, para isso, basta que $|(n+1)^2| \leq |(\sqrt{c}n)^2|$ ou $|n+1| \leq |\sqrt{c}n|$
- Se $\sqrt{c} = 2$, ou seja, $c = 4$, isso é verdade, para $n \geq 1$

Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- Então temos que $g(n)$ domina $f(n)$, pois $|n^2| \leq |(n+1)^2|$, $n \geq 0$

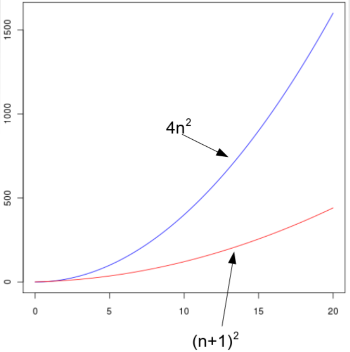


Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- Então temos que $g(n)$ domina $f(n)$, pois $|n^2| \leq |(n+1)^2|$, $n \geq 0$

  e $f(n)$ domina $g(n)$, pois $|(n+1)^2| \leq |4n^2|$, $n \geq 1$

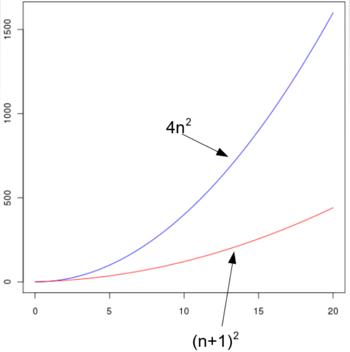


Relacionamento Assintótico

Quem domina quem?

- Então temos que $g(n)$ domina $f(n)$, pois $|n^2| \leq |(n+1)^2|$, $n \geq 0$

  e $f(n)$ domina $g(n)$, pois $|(n+1)^2| \leq |4n^2|$, $n \geq 1$
- Nesse caso, dizemos que $f(n)$ e $g(n)$ dominam assintoticamente uma a outra



Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$

Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$
    - Escreve-se $g(n) = O(f(n))$ e lê-se: "$g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$"

Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$
  - Escreve-se $g(n) = O(f(n))$ e lê-se: "$g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$"
- E para que serve isso?

Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$
  - Escreve-se $g(n) = O(f(n))$ e lê-se: "$g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$"
- E para que serve isso?
  - Muitas vezes calcular a função de complexidade $g(n)$ de um algoritmo é complicado

Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$
  - Escreve-se $g(n) = O(f(n))$ e lê-se: "$g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$"
- E para que serve isso?
  - Muitas vezes calcular a função de complexidade $g(n)$ de um algoritmo é complicado
  - É mais fácil determinar que $g(n)$ é $O(f(n))$, isto é, que assintoticamente $g(n)$ cresce no máximo como $f(n)$

Notação O

- Knuth (1968) criou a notação O (O grande) para expressar que $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$
  - Escreve-se $g(n) = O(f(n))$ e lê-se: "$g(n)$ é da ordem de no máximo $f(n)$"
- E para que serve isso?
  - Muitas vezes calcular a função de complexidade $g(n)$ de um algoritmo é complicado
  - É mais fácil determinar que $g(n)$ é $O(f(n))$, isto é, que assintoticamente $g(n)$ cresce no máximo como $f(n)$
  - Ex: Se dizemos que $T(n) = O(n^2)$, significa que existem constantes c e m tais que, para $n \geq m$, $T(n) \leq cn^2$

Notação O

Definição

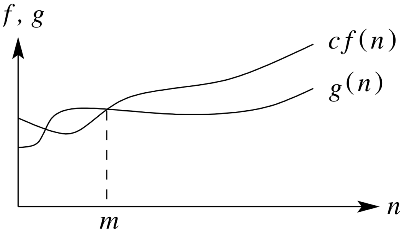
Uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existirem constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m$

Notação O

Definição

Uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existirem constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m$

- Informalmente, dizemos que, se $g(n) \in O(f(n))$, então $g(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $f(n)$

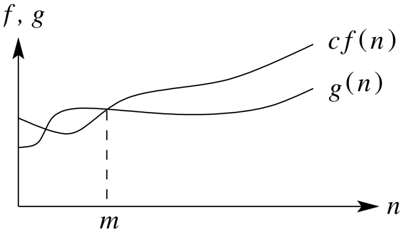


Notação O

Definição

Uma função $g(n)$ é $O(f(n))$ se existirem constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m$

- Informalmente, dizemos que, se $g(n) \in O(f(n))$, então $g(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $f(n)$



- Trata-se então de um **limite assintótico superior** para $g(n)$

Notação O

Exemplo

- $\frac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$?

Notação O

Exemplo

- $\frac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.

Notação O

Exemplo

- $\dfrac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.

  - Fazendo $c = \frac{3}{2}$ temos $\frac{3}{2}n^2 - 2n \leq \frac{3}{2}n^2$, para $m \geq 2$

Notação O

Exemplo

- $\dfrac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.

  - Fazendo $c = \frac{3}{2}$ temos $\frac{3}{2}n^2 - 2n \leq \frac{3}{2}n^2$, para $m \geq 2$
  - Outras constantes podem existir, mas o que importa é que exista alguma escolha para as constantes

Notação O

Exemplo

- $\dfrac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.
  - Fazendo $c = \frac{3}{2}$ temos $\frac{3}{2}n^2 - 2n \leq \frac{3}{2}n^2$, para $m \geq 2$
  - Outras constantes podem existir, mas o que importa é que exista alguma escolha para as constantes
- $(n+1)^2 \in O(n^2)$?

Notação O

Exemplo

- $\frac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.
  - Fazendo $c = \frac{3}{2}$ temos $\frac{3}{2}n^2 - 2n \leq \frac{3}{2}n^2$, para $m \geq 2$
  - Outras constantes podem existir, mas o que importa é que exista alguma escolha para as constantes
- $(n+1)^2 \in O(n^2)$?
  - Fazendo $c = 4, m = 1$, temos $(n+1)^2 \leq 4n$

Notação O

Exemplo

- $\frac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$? Faremos demonstrações completas na lousa, mas seguem resumos nos slides.
  - Fazendo $c = \frac{3}{2}$ temos $\frac{3}{2}n^2 - 2n \leq \frac{3}{2}n^2$, para $m \geq 2$
  - Outras constantes podem existir, mas o que importa é que exista alguma escolha para as constantes
- $(n+1)^2 \in O(n^2)$?
  - Fazendo $c = 4, m = 1$, temos $(n+1)^2 \leq 4n$
  - $(n+1)^2 \in O(n^2)$ para $n \geq 1$

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$ (ou seja, $c = 6$ e $m = 0$)

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$ (ou seja, $c = 6$ e $m = 0$)
- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^4)$?

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$ (ou seja, $c = 6$ e $m = 0$)
- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^4)$?
  - Sim, mas essa afirmação é mais fraca que dizer que $3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$ (ou seja, $c = 6$ e $m = 0$)
- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^4)$?
  - Sim, mas essa afirmação é mais fraca que dizer que $3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$
  - Escolhemos então o limite "mais baixo", pois nos interessa o assintoticamente mais próximo de $3n^3 + 2n^2 + n$

Notação O

Exemplo

- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Basta mostrar que $3n^3 + 2n^2 + n \leq 6n^3$, para $n \geq 0$ (ou seja, $c = 6$ e $m = 0$)
- $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^4)$?
  - Sim, mas essa afirmação é mais fraca que dizer que $3n^3 + 2n^2 + n$ é $O(n^3)$
  - Escolhemos então o limite "mais baixo", pois nos interessa o assintoticamente mais próximo de $3n^3 + 2n^2 + n$
  - Isso, contudo, não implica estar errado que é $O(n^4)$

Notação O

Operações com a notação O

Notação O

Operações com a notação O

$$f(n) = O(f(n))$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ } (c\text{: constante})
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ } (c\text{: constante}) \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ (}c\text{: constante)} \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \ (c\text{: constante}) \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\
O(f(n) + g(n)) &= O(f(n)) + O(g(n))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ } (c\text{: constante}) \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\
O(f(n) + g(n)) &= O(f(n)) + O(g(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(max(f(n), g(n)))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ (}c\text{: constante)} \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\
O(f(n) + g(n)) &= O(f(n)) + O(g(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(max(f(n), g(n))) \\
O(f(n))O(g(n)) &= O(f(n)g(n))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

$$
\begin{aligned}
f(n) &= O(f(n)) \\
c \times O(f(n)) &= O(f(n)) \text{ (}c\text{: constante)} \\
O(f(n)) + O(f(n)) &= O(f(n)) \\
O(O(f(n))) &= O(f(n)) \\
O(f(n) + g(n)) &= O(f(n)) + O(g(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(max(f(n), g(n))) \\
O(f(n))O(g(n)) &= O(f(n)g(n)) \\
f(n)O(g(n)) &= O(f(n)g(n))
\end{aligned}
$$

Notação O

Operações com a notação O

- A regra $O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$ pode ser usada para calcular a complexidade de uma sequência de trechos de um programa

Notação O

Operações com a notação O

- A regra $O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$ pode ser usada para calcular a complexidade de uma sequência de trechos de um programa
- Ex: Suponha 3 trechos: $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(nlog(n))$. Qual a complexidade do algoritmo como um todo?

Notação O

Operações com a notação O

- A regra $O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$ pode ser usada para calcular a complexidade de uma sequência de trechos de um programa
- Ex: Suponha 3 trechos: $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(nlog(n))$. Qual a complexidade do algoritmo como um todo?
  - Lembre-se que a complexidade total será a soma das complexidades de cada trecho

Notação O

Operações com a notação O

- A regra $O(f(n)) + O(g(n)) = O(max(f(n), g(n)))$ pode ser usada para calcular a complexidade de uma sequência de trechos de um programa
- Ex: Suponha 3 trechos: $O(n)$, $O(n^2)$ e $O(nlog(n))$. Qual a complexidade do algoritmo como um todo?
  - Lembre-se que a complexidade total será a soma das complexidades de cada trecho
  - $O(n)+O(n^2)+O(nlog(n)) = max(O(n), O(n^2), O(nlog(n)))$ $= O(n^2)$

Notação O

Operações com a notação O

- Isso facilita muito o cálculo do limite superior para a complexidade de um algoritmo

Notação O

Operações com a notação O

- Isso facilita muito o cálculo do limite superior para a complexidade de um algoritmo
- Ex: $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?

Notação O

Operações com a notação O

- Isso facilita muito o cálculo do limite superior para a complexidade de um algoritmo
- Ex: $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Sim, porque o termo de maior ordem ($3n^3$) é claramente $O(n^3)$

Notação O

Operações com a notação O

- Isso facilita muito o cálculo do limite superior para a complexidade de um algoritmo
- Ex: $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Sim, porque o termo de maior ordem ($3n^3$) é claramente $O(n^3)$
  - Então, pela regra, este será o limite da expressão como um todo

Notação O

Operações com a notação O

- Isso facilita muito o cálculo do limite superior para a complexidade de um algoritmo
- Ex: $3n^3 + 2n^2 + n \in O(n^3)$?
  - Sim, porque o termo de maior ordem ($3n^3$) é claramente $O(n^3)$
  - Então, pela regra, este será o limite da expressão como um todo
  - Não há necessidade de provar usando os termos de menor ordem

Notação O

Operações com a notação O

- Por vezes basta observar a estrutura do algoritmo para saber sua complexidade

Notação O

Operações com a notação O

- Por vezes basta observar a estrutura do algoritmo para saber sua complexidade
  - Como quando há um laço encadeado em outro, ambos proporcionais à entrada

Notação O

Operações com a notação O

- Por vezes basta observar a estrutura do algoritmo para saber sua complexidade
  - Como quando há um laço encadeado em outro, ambos proporcionais à entrada
  - Nesse caso, essa parte é $O(n^2)$ e, se nenhuma outra for mais alta, então esse é o limite do algoritmo

Notação O

Operações com a notação O

- Por vezes basta observar a estrutura do algoritmo para saber sua complexidade
  - Como quando há um laço encadeado em outro, ambos proporcionais à entrada
  - Nesse caso, essa parte é $O(n^2)$ e, se nenhuma outra for mais alta, então esse é o limite do algoritmo
- Mais do que isso, sendo O um limite superior, se o calcularmos no pior caso teremos um limite superior para toda e qualquer entrada

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos cujas complexidades são **equivalentes**?

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos cujas complexidades são **equivalentes**?
  - Ou seja, quando $f(n)$ e $g(n)$ dominam assintoticamente uma à outra

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos cujas complexidades são **equivalentes**?
  - Ou seja, quando $f(n)$ e $g(n)$ dominam assintoticamente uma à outra
- Nesses casos, o comportamento assintótico não serve para a comparação

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos cujas complexidades são **equivalentes**?
  - Ou seja, quando $f(n)$ e $g(n)$ dominam assintoticamente uma à outra
- Nesses casos, o comportamento assintótico não serve para a comparação
  - Teremos que ver sua complexidade com mais detalhes, observando as constantes

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?
  - Nesse caso, pode ocorrer que um algoritmo assintoticamente mais lento seja mais rápido para entradas pequenas

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?
  - Nesse caso, pode ocorrer que um algoritmo assintoticamente mais lento seja mais rápido para entradas pequenas
- Ex: um programa tem $f(n) = 100n$, e outro $g(n) = 2n^2$. Qual dos dois é melhor?

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?
  - Nesse caso, pode ocorrer que um algoritmo assintoticamente mais lento seja mais rápido para entradas pequenas
- Ex: um programa tem $f(n) = 100n$, e outro $g(n) = 2n^2$. Qual dos dois é melhor?
  - Depende do tamanho do problema

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?
  - Nesse caso, pode ocorrer que um algoritmo assintoticamente mais lento seja mais rápido para entradas pequenas
- Ex: um programa tem $f(n) = 100n$, e outro $g(n) = 2n^2$. Qual dos dois é melhor?
  - Depende do tamanho do problema
  - Para $n < 50$, o programa com tempo $2n^2$ é melhor do que o de $100n$

Notação O

Problemas

- Como comparar algoritmos quando não teremos entradas grandes?
  - Nesse caso, pode ocorrer que um algoritmo assintoticamente mais lento seja mais rápido para entradas pequenas
- Ex: um programa tem $f(n) = 100n$, e outro $g(n) = 2n^2$. Qual dos dois é melhor?
  - Depende do tamanho do problema
  - Para $n < 50$, o programa com tempo $2n^2$ é melhor do que o de $100n$
  - Então, se nunca teremos $n \geq 50$, o programa com $2n^2$ é melhor

Notação o

Definição

Uma função $g(n)$ é $o(f(n))$ se, para toda constante $c > 0$, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m$

Notação o

Definição

Uma função $g(n)$ é $o(f(n))$ se, para toda constante $c > 0$, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m$

- Informalmente, dizemos que, se $g(n) \in o(f(n))$, então $g(n)$ cresce mais lentamente que $f(n)$

Notação o

Definição

Uma função $g(n)$ é $o(f(n))$ se, para toda constante $c > 0$, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m$

- Informalmente, dizemos que, se $g(n) \in o(f(n))$, então $g(n)$ cresce mais lentamente que $f(n)$
  - Intuitivamente, na notação o a função $g(n)$ tem crescimento muito menor que $f(n)$ quando n tende para o infinito

Notação o

Definição

Uma função $g(n)$ é $o(f(n))$ se, para toda constante $c > 0$, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m$

- Informalmente, dizemos que, se $g(n) \in o(f(n))$, então $g(n)$ cresce mais lentamente que $f(n)$
  - Intuitivamente, na notação o a função $g(n)$ tem crescimento muito menor que $f(n)$ quando n tende para o infinito
  - Ou seja, $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$
  - A expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para <u>alguma</u> constante $c > 0$

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$
  - A expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para alguma constante $c > 0$
  - Basta acharmos um c e um m

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$
  - A expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para <u>alguma</u> constante $c > 0$
  - Basta acharmos um c e um m
- $o(f(n)) = \{g(n)$: **para toda** constante positiva c, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m\}$.

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$
  - A expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para alguma constante $c > 0$
  - Basta acharmos um c e um m
- $o(f(n)) = \{g(n)$: **para toda** constante positiva c, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m\}$.
  - A expressão $0 \leq g(n) < cf(n)$ é válida para toda constante $c > 0$

Diferença entre O e o

- $O(f(n)) = \{g(n)$: **existem** constantes positivas c e m tais que $0 \leq g(n) \leq cf(n)$, para todo $n \geq m\}$
  - A expressão $0 \leq g(n) \leq cf(n)$ é válida para <u>alguma</u> constante $c > 0$
  - Basta acharmos um c e um m
- $o(f(n)) = \{g(n)$: **para toda** constante positiva c, existe uma constante $m > 0$ tal que $0 \leq g(n) < cf(n)$, para todo $n \geq m\}$.
  - A expressão $0 \leq g(n) < cf(n)$ é válida para <u>toda</u> constante $c > 0$
  - Para todo c temos que ter um m

Notação o

Exemplo

- $1000n^2 \in o(n^3)$?

Notação o

Exemplo

- $1000n^2 \in o(n^3)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $1000n^2 < cn^3$

Notação o

Exemplo

- $1000n^2 \in o(n^3)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $1000n^2 < cn^3$
  - $\Rightarrow 1000 < cn$ (dividindo ambos os lados por n^2)

Notação o

Exemplo

- $1000n^2 \in o(n^3)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $1000n^2 < cn^3$
  - $\Rightarrow 1000 < cn$ (dividindo ambos os lados por n^2)
  - $\Rightarrow n > \dfrac{1000}{c}$

Notação o

Exemplo

- $1000n^2 \in o(n^3)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $1000n^2 < cn^3$
  - $\Rightarrow 1000 < cn$ (dividindo ambos os lados por n^2)
  - $\Rightarrow n > \dfrac{1000}{c}$
  - Ou seja, para todo valor de c, um m que satisfaz a definição é $m = \dfrac{1000}{c} + 1$ (pois $n \geq m$ e $n > \frac{1000}{c}$)

Notação o

Exemplo

- $2n^2 \in o(n^2)$?

Notação o

Exemplo

- $2n^2 \in o(n^2)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$

Notação o

Exemplo

- $2n^2 \in o(n^2)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$
  - Mas $2n^2 < cn^2 \Rightarrow c > 2$ (caso em que vale para todo $n > 0$)

Notação o

Exemplo

- $2n^2 \in o(n^2)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$
  - Mas $2n^2 < cn^2 \Rightarrow c > 2$ (caso em que vale para todo $n > 0$)
  - Ou seja, não há m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$

Notação o

Exemplo

- $2n^2 \in o(n^2)$?
  - Buscamos um m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$
  - Mas $2n^2 < cn^2 \Rightarrow c > 2$ (caso em que vale para todo $n > 0$)
  - Ou seja, não há m tal que, para todo c e $n \geq m$, $2n^2 < cn^2$
  - Logo, $2n^2 \notin o(n^2)$

Referências

- Ziviani, Nivio. Projeto de Algoritmos: com implementações em Java e C++. Cengage. 2007.
- Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald L., Stein, Clifford. Introduction to Algorithms. 2a ed. MIT Press, 2001.
- Gersting, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 3a ed. LTC. 1993.
- https://www.chegg.com/tutors/what-is-Asymptotic-and-Unbounded-Behavior/
- https://www.mathsisfun.com/algebra/asymptote.html

Aula 03 – Análise Assintótica de Algoritmos: Notação O e o

Norton T. Roman & Luciano A. Digiampietri
digiampietri@usp.br
@digiampietri

2023